Algoritmizace

Marko Genyg-Berezovskyj, Daniel Průša

2010 – 2021

Úvod

- stránky předmětu:

  https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b4b33alg/start

- cíle předmětu

  Cílem je schopnost samostatné implementace různých variant základních úloh informatiky. Hlavní témata jsou algoritmy řazení a vyhledávání a jim odpovídající datové struktury. Důraz je kladen na algoritmický aspekt úloh a efektivitu praktického řešení.

- předpoklady

  Kurs předpokládá **schopnost programování** v alespoň jednom z jazyků C/C++/Java. Součástí cvičení jsou programovací úlohy na řešení problematiky ALG. Adept musí ovládat základní datové struktury jako pole, seznam, soubor a musí být schopen manipulovat s daty v těchto strukturách.

Průzkum

Charakterizujte jedním slovem svoji momentální náladu.

Join at

slido.com

#315 736

slido

Charakterizujte jedním slovem svoji momentální náladu.

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

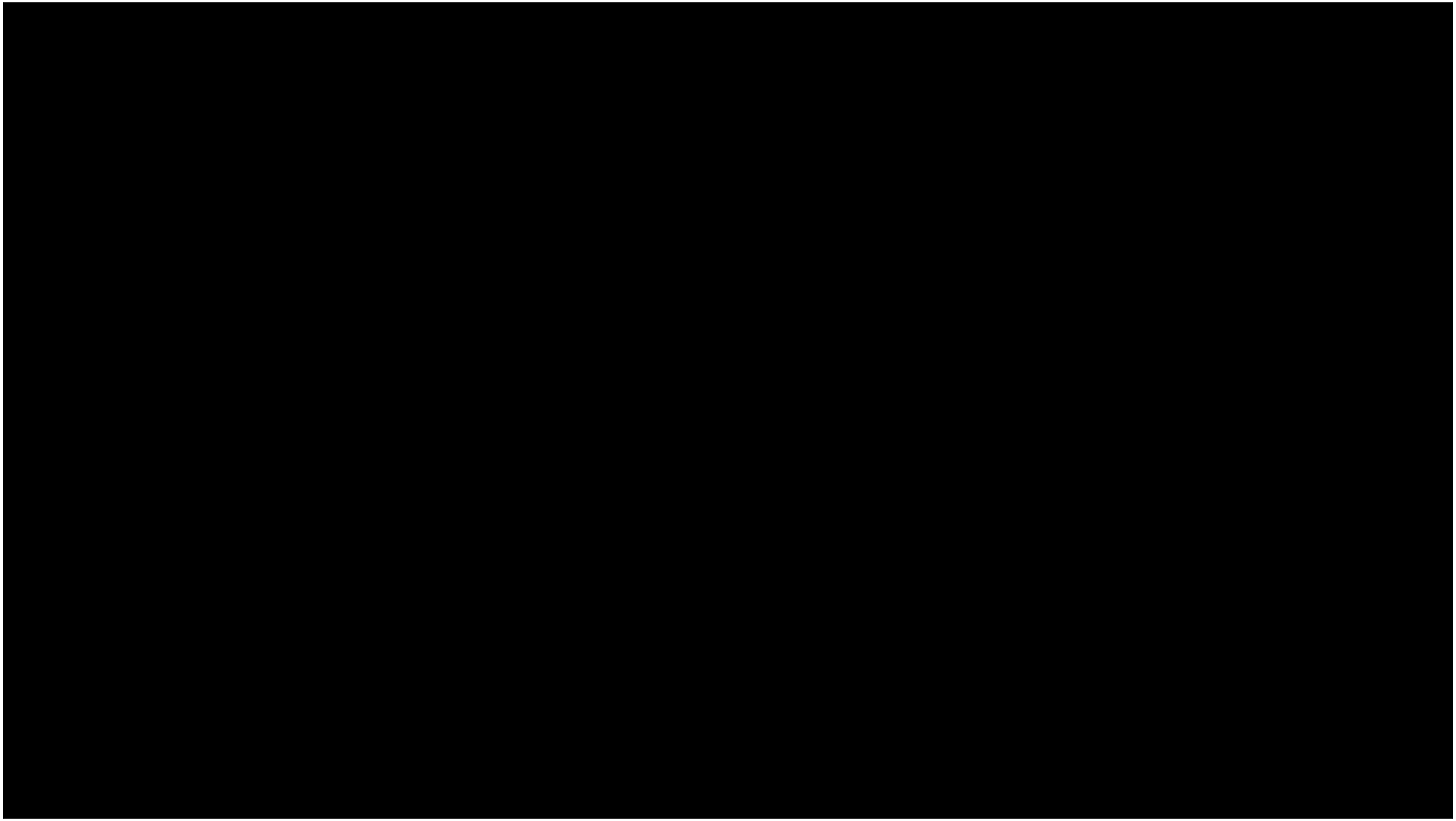
Průzkum


Sick
Ráno
očekávání
cuketa
bruh
nijaká
Brambora
Ok
Zvědavý
lmao
udýchaný
Fajn
Skvele
xD
Unavený
neurcita
WEED
nice
Žiji
Super
Fresh
ඞ
Pohoda
Strach
Сойдёт
Rozladenyskvělá
Sus
hakunamatata
raketťák
Rozespalý
nic moc
Zima

Problémy a algoritmy

- Výpočetní problém P
  - Úkol zpracovat vstupní data IN na výstupní data OUT se zadanými vlastnostmi.
- Algoritmus A
  - Výpočetní postup řešení problému P.
  - Tedy přesný popis posloupnosti kroků, která vezme vstupní data IN a vyprodukuje výstupní data OUT dle zadaných vlastností problémem P.
- Instance problému
  - Problém s konkrétními vstupními daty potřebnými pro jeho řešení.
- Korektnost algoritmu A pro problém P
  - Algoritmus A je korektní, pokud pro každou instanci problému P vydá v **konečném** čase **správný** výstup (tedy takový, který řeší problém P).

Porovnání řadících algoritmů



https://youtu.be/ZZuD6iUe3Pc

Jak měřit algoritmy?

- Podle algoritmu vytvoříme program v programovacím jazyku a několik vybraných instancí problému.
- Algoritmy pak porovnáme podle rychlosti a paměťové náročnosti na konkrétním počítači.
- Ale co když bychom změnili počítač, nebo jen OS, nebo co kdybychom vybrali jiné instance problému, nebo kdybychom změnili programovací jazyk?
- Budou algoritmy výše popsaným způsobem stále stejně porovnatelné? …. zřejmě nikoliv …
- → Budeme potřebovat nějakou nezávislou metodu (na programovacím jazyku, počítači, atd …) na porovnávání algoritmů.

Růst funkcí

- Čas potřebný ke zpracování dat velikosti n, jestliže počet operací při provádění algoritmu je dán funkcí $\mathrm{T}(n)$ a provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu. (Připomeňme, že počet atomu ve vesmíru se odhaduje na 10^{80} a stáří na 14×10^{9} let)

$\mathrm{T}(n)/n$	20	40	60	80	100
$\log(n)$	4.3 μs	5.3 μs	5.9 μs	6.3 μs	6.6 μs
n	20 μs	40 μs	60 μs	80 μs	0.1 ms
$n\log(n)$	86 μs	0.2 ms	0.35 ms	0.5 ms	0.7 ms
n^2	0.4 ms	1.6 ms	3.6 ms	6.4 ms	10 ms
n^3	8 ms	64 ms	0.22 s	0.5 s	1 s
n^4	0.16 s	2.56 s	13 s	41 s	100 s
2^n	1 s	12.7 dní	36600 let	10^{11} let	10^{16} let
$n!$	77100 let	10^{34} let	10^{68} let	10^{105} let	10^{144} let

Asymptotické odhady

- horní asymptotický odhad (velké omikron odhad):

$$f(n) \in O(g(n))$$

- význam:

f je shora asymptoticky ohraničená funkcí g (až na multiplikativní konstantu)

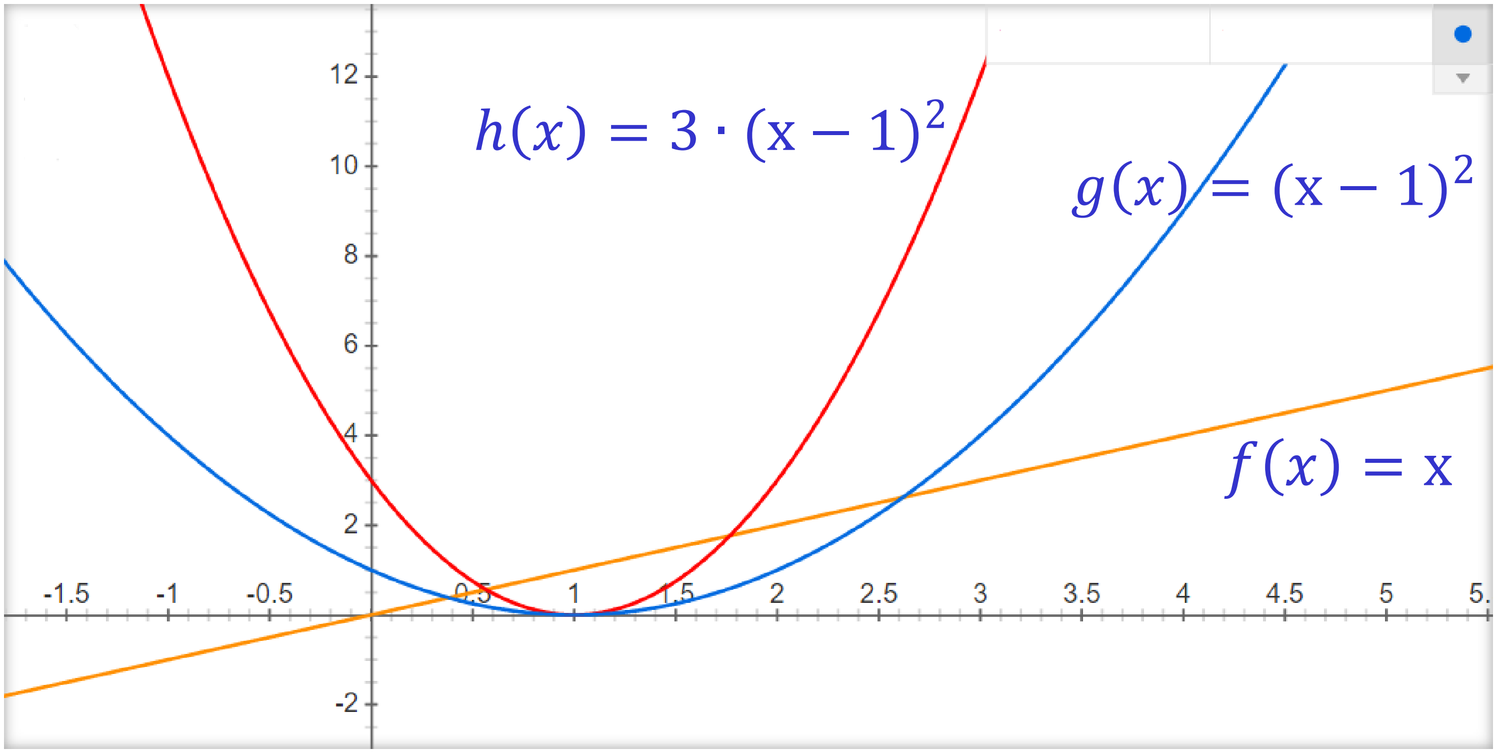
- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : f(n) \le c \cdot g(n)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- příklad $f(x) \in O(g(n)), \quad h(x) \in O(g(n))$



$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : \; f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Asymptotické odhady

Co neplatí?

A. $22 \cdot n + 3 \in O(n - 1000)$

B. $(n^2 + 1)^2 \in O(5 \cdot n^3)$

C. $\dfrac{3n + 1}{n + 1} \in O(1)$

Join at
slido.com
#315 736

slido

Co neplatí?

ⓘ Start presenting to display the poll results on this slide.

Výsledek

Co neplatí?

0 9 7

Asymptotické odhady

- horní asymptotický odhad pro více proměnných:

$$f(n_1, \cdots, n_k) \in O(g(n_1, \cdots, n_k))$$

- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n_1 > n_0) \cdots (\forall n_k > n_0) :$$
$$f(n_1, \cdots, n_k) \leq c \cdot g(n_1, \cdots, n_k)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- poznámka

v literatuře se často místo

$$f(n) \in O(g(n))$$

používá zápis

$$f(n) = O(g(n))$$

není to ale zcela přesné z matematického hlediska

Asymptotické odhady

- dolní asymptotický odhad (velké omega odhad):

$$f(n) \in \Omega(g(n))$$

- význam:

f je zdola asymptoticky ohraničená funkcí g (až na konstantu)

- definice:

$$(\exists c > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) : \ c \cdot g(n) \leq f(n)$$

kde $c \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- optimální asymptotický odhad (velké théta odhad):

$$f(n) \in \Theta(g(n))$$

- význam:

f je asymptoticky ohraničená funkcí g z obou stran (až na konstantu)

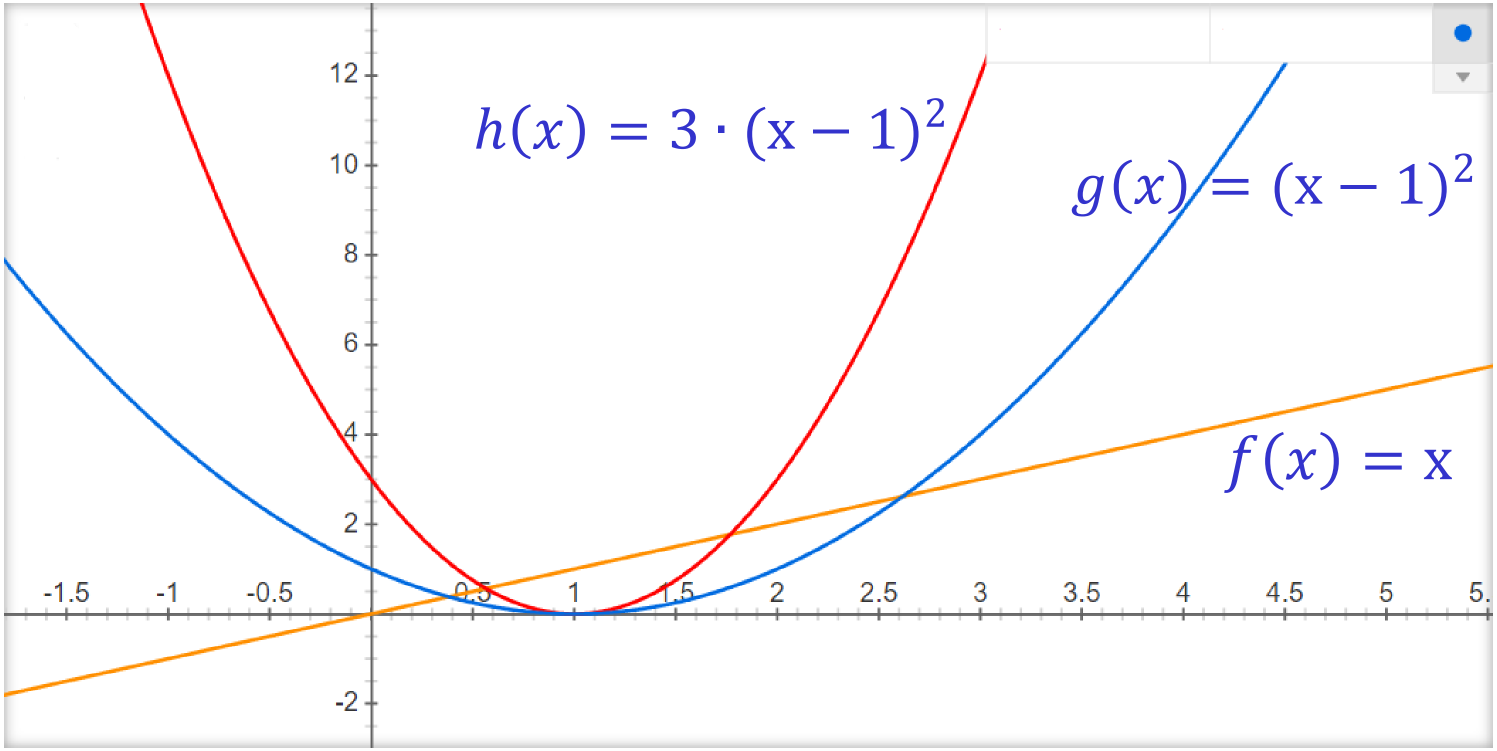
- definice: $\Theta\big(g(n)\big) \stackrel{\text{def}}{=} O\big(g(n)\big) \cap \Omega(g(n))$
- nebo alternativně:

$$(\exists c_1, c_2 > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0) \colon c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$$

kde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{>0}$ $n_0, n \in \mathbb{N}$ $f, g \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

Asymptotické odhady

- příklad $g(n) \in \Theta(h(n)), \quad g(n) \notin \Theta(f(n))$



Asymptotické odhady

- příklad: Mějme dvojrozměrné pole MxN celých čísel. Jaká je asymptotická složitost problému nalezení největšího čísla v tomto poli?

- horní:
  - $O((M+N)^2)$ ✓
  - $O(\max(M,N)^2)$ ✓
  - $O(N^2)$ ✗
  - $O(M*N)$ ✓
- dolní:
  - $\Omega(1)$ ✓
  - $\Omega(M)$ ✓
  - $\Omega(M*N)$ ✓

- optimální:
  - $\Theta(M*N)$

Asymptotické odhady

- O algoritmu se složitostí $f(n)$ říkáme, že je

  logaritmický, pokud $f(n) \in \Theta(\log(n))$

  lineární, pokud $f(n) \in \Theta(n)$

  kvadratický, pokud $f(n) \in \Theta(n^2)$

  kubický, pokud $f(n) \in \Theta(n^3)$

  polynomiální, pokud $f(n) \in \Theta(n^k)$ pro $k \in \mathbb{N}$

  exponenciální, pokud $f(n) \in \Theta(k^n)$ pro $k \in \mathbb{N}$

- Poznámka: U asymptotických odhadů nemá smysl u logaritmických složitostí uvádět základ logaritmu, protože platí $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$ pro libovolná nenulová kladná a,b.

Asymptotické odhady

- Jak dokážeme $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$?

$$\boxed{\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

vzoreček

konstanta

Vlastnosti asymptotických odhadů

$$\begin{aligned}
n^m &\in O\left(n^{m'}\right) \text{ pokud } m \leq m' \\
f(n) &\in O(f(n)) \\
c \cdot O(f(n)) &= O(c \cdot f(n)) = O(f(n)) \\
O\big(O(f(n))\big) &= O\big(f(n)\big) \\
O(f(n)) + O(g(n)) &= O(\max\{f(n), g(n)\}) \\
O(f(n)) \cdot O(g(n)) &= O\big(f(n) \cdot g(n)\big) \\
O(f(n) \cdot g(n)) &= f(n) \cdot O(g(n))
\end{aligned}$$

- Třídu složitosti polynomu určuje člen s nejvyšší mocninou:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot n^{k-i} \in \sum_{i=0}^{k} O(n^k) = k \cdot O(n^k) = O(k \cdot n^k) = O(n^k)$$

Vlastnosti asymptotických odhadů

- Věta: Jsou-li funkce $f(n)$, $g(n)$ vždy kladné, pak pro limitu v ∞ platí
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, pak $f(n) \in O(g(n))$, ale **neplatí** $f(n) \in \Theta(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = a$, kde $0 < a < \infty$, pak $f(n) \in \Theta(g(n))$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, pak $g(n) \in O(f(n))$, ale **neplatí** $g(n) \in \Theta(f(n))$
- Důsledek: Mějme pevně zvolené číslo $k \in \mathbb{N}$, pak platí

$$(\log(n))^k \in O(n)$$

- Důkaz lze provést pomocí L'Hopitalova pravidla.

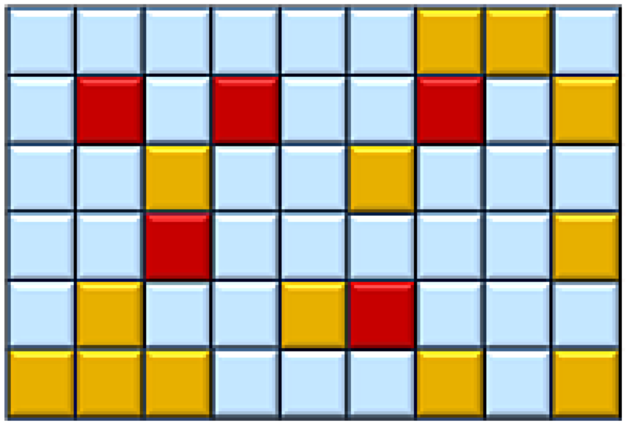
Vlastnosti asymptotických odhadů

- Dokážeme $(\ln(n))^2 \in O(n)$

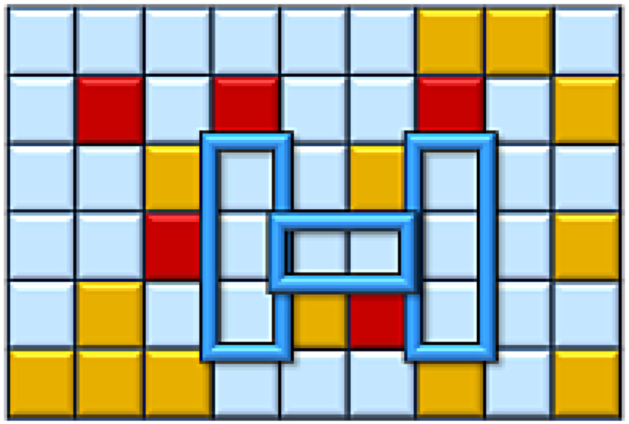
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{((\ln x)^2)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\ln x}{1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\cdot\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$$

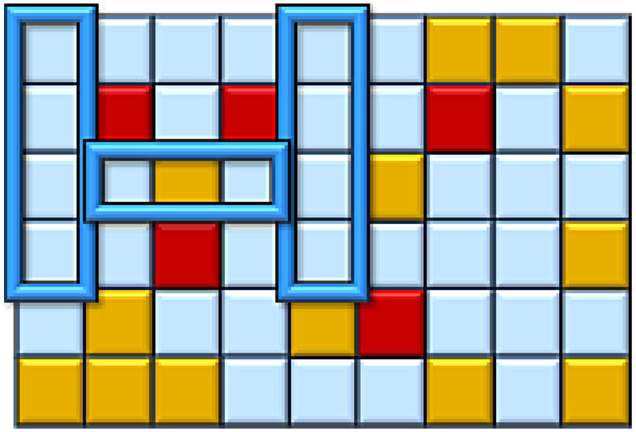
Domácí úloha



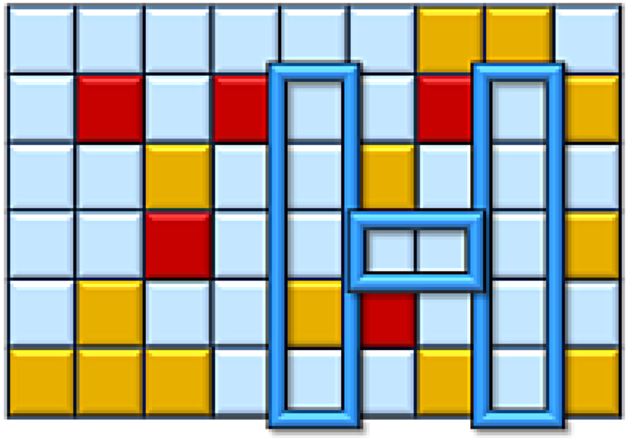
a)



b)



c)



d)