



ČVUT

ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE

Kinematická Analýza Maticová metoda

České vysoké učení technické v Praze
Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky

Ing. Tomáš Jochman

Úvod do kinematiky mnoha těles - opakování

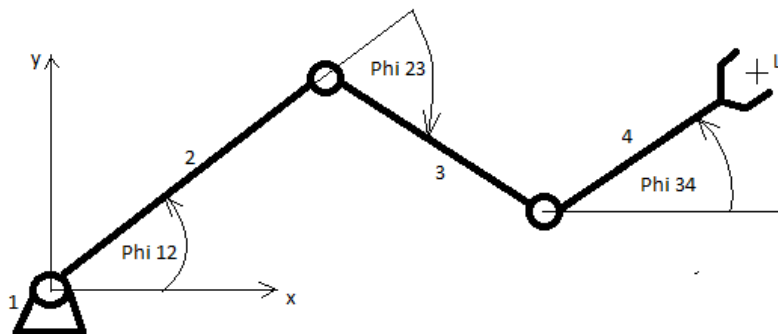
- Kinematická dvojice – omezuje pohyb volně pohyblivých těles (např. rotační, posuvná, šroubová, válcová, sférická,..)
- Kinematický řetězec – několik těles spojených kinematickými dvojicemi (otevřený nebo uzavřený)
 - **Rozdíl mezi otevřeným a uzavřeným kinematickým řetězcem**
 - Otevřený – pouze nezávislé souřadnice
 - Uzavřený – některé souřadnice jsou závislé
 - **Poloha těles soustavy se vztahuje k referenčnímu tělesu**
 - **Toto těleso se nehýbe a nazýváme ho rám**
- Mechanismus – zařízení pro transformaci pohybu a přenos sil nebo pro vedení bodů a těles po dráze (musí mít alespoň 1 stupeň volnosti)
 - **Vzniká přeměnou členu uzavřeného kinematického řetězce na rám**
- Stupně volnosti – počet parametrů, které jsou nutné k jednoznačnému určení polohy soustavy mnoha těles
 - **Volné těleso v prostoru má 6 stupňů volnosti**

Úvod do kinematické analýzy

- Základem je popis pohybu bodu kolem tělesa
- Tradiční přístup je pomocí vektorů – pomocí něj však nelze popsat pohyb tělesa jedinou veličinou – používáme maticový a kvaternionový přístup, který to dokáže
- Vektorová metoda
- Maticová metoda
 - **Poloha tělesa v prostoru je popsána pomocí transformací, kterou aplikujeme na souřadnicový systém tělesa tak, aby se ztotožnil se základním souřadným systémem rámu**
 - **Pohyb tělesa vzhledem k jinému tělesu popisujeme transformací mezi příslušnými souřadnicovými systémy**
 - Transformace je funkce času
- Denavitova-Hartenbergova notace
-

Hlavní problémy kinematiky

- **Přímá úloha**
 - **Určení polohy, rychlosti a zrychlení bodu nebo tělesa**
 - **Známe hodnoty nezávislých souřadnic a jejich derivací**
 - **Problém je určit hodnoty závislých souřadnic, pokud máme uzavřenou smyčku**
- **Nepřímá úloha**
 - **Hledáme hodnoty nezávislých souřadnic a známe pohyb některých bodů či těles**
 - **Tyto úlohy se vyskytují v robotice a řeší se převodem pohybů jako vazeb**
- **Příklad s manipulátorem:**



Koncový efektor (TCP je bod L) $[x_L, y_L, \varphi_{14}]$
 Elektrické pohony s enkodérem $[\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}]$

Přímá úloha $[x_L, y_L, \varphi_{14}] = f(\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34})$

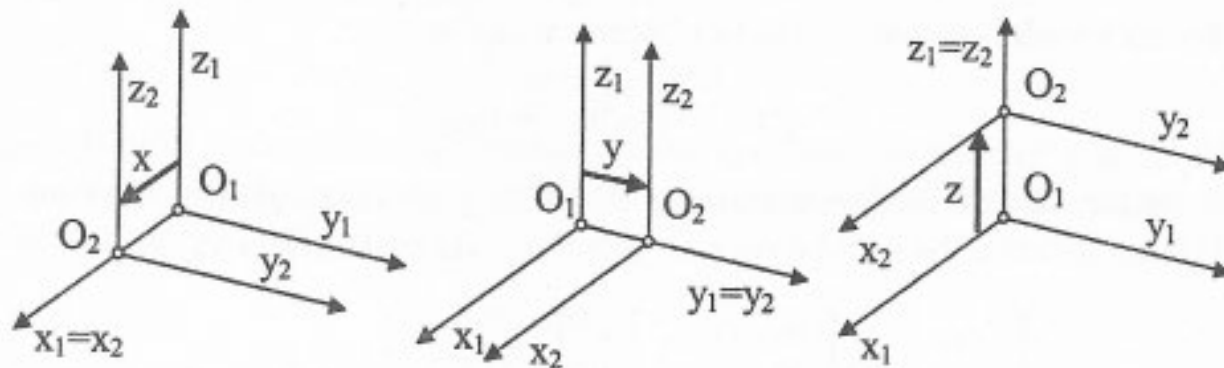
Nepřímá úloha $[\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{34}] = g(x_L, y_L, \varphi_{14})$
 (též inverzní úloha)

Kinematika tělesa – obecné souřadnicové systémy

- Je velmi obtížné přímo nalézt matici směrových cosinů a průvodič počátku
- Lze to zjednodušit rozkladem pohybu na posloupnost tzv. základních pohybů
 - **6 základních pohybů – translace X, Y a Z a rotace X, Y a Z**

TRANSLACE

$$T_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



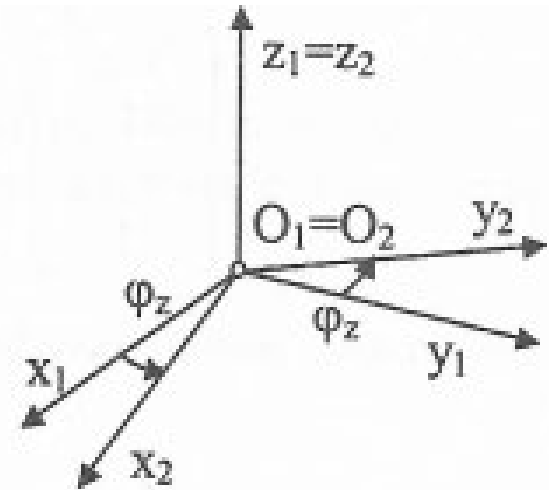
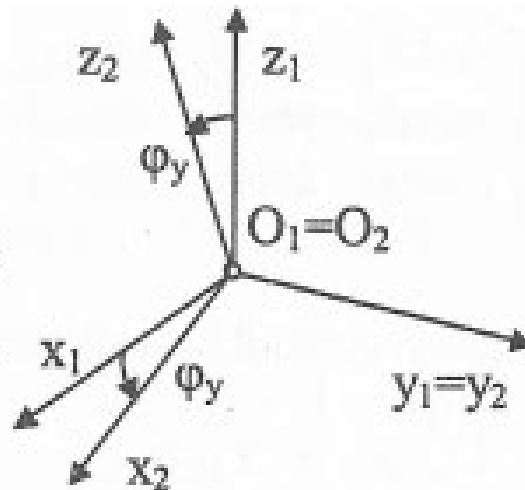
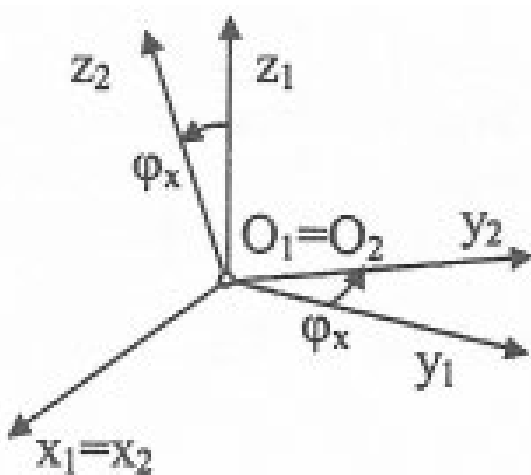
Kinematika tělesa – obecné souřadnicové systémy

ROTACE

$$T_{\varphi_x}(\varphi_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x & 0 \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

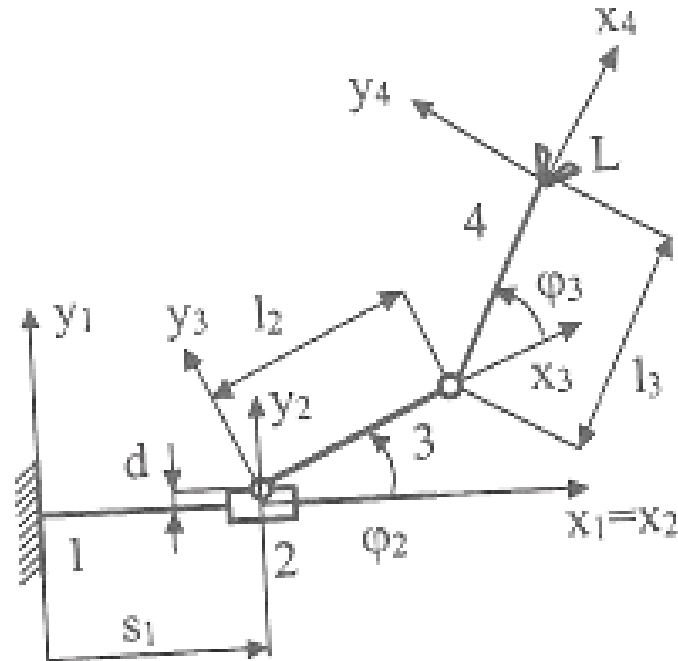
$$T_{\varphi_y}(\varphi_y) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{\varphi_z}(\varphi_z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Kinematika tělesa – příklad 1 – rov. manipulátor

- Definujte polohu TCP (bod L na obrázku) koncového efektoru na rovinném manipulátoru v kartézských souřadnicích.



Kinematika tělesa – příklad 1 – rov. manipulátor

- Definujte polohu TCP (bod L na obrázku) koncového efektoru na rovinném manipulátoru v kartézských souřadnicích.
- Postup:

$$n = 3(n - 1) - 2r - 2p - 1o - 3t - 2v$$

$$= 3(4 - 1) - 2 * 2 - 2 * 1 = 9 - 4 - 2 = 3^\circ \text{ volnosti}$$

$$s_{12} = s_{120} + v_{12}t \quad \varphi_2 = \omega_{12}t \quad \varphi_3 = \omega_{23}t \quad r_{4L} = [0; 0; 0; 1]$$

$${}^1r_{1L} = T_{14} {}^4r_{4L}$$

$$T_{14} = T_{12} T_{23} T_{34}$$

$$T_{12} = T_x(s_1)$$

$$T_{23} = T_y(d) T_\varphi(\varphi_2)$$

$$T_{34} = T_x(l_2) T_\varphi(\varphi_3) T_x(l_3)$$

$$r_{1L} = T_x(s_1) T_y(d) T_\varphi(\varphi_2) T_x(l_2) T_\varphi(\varphi_3) T_x(l_3) r_{2L}$$

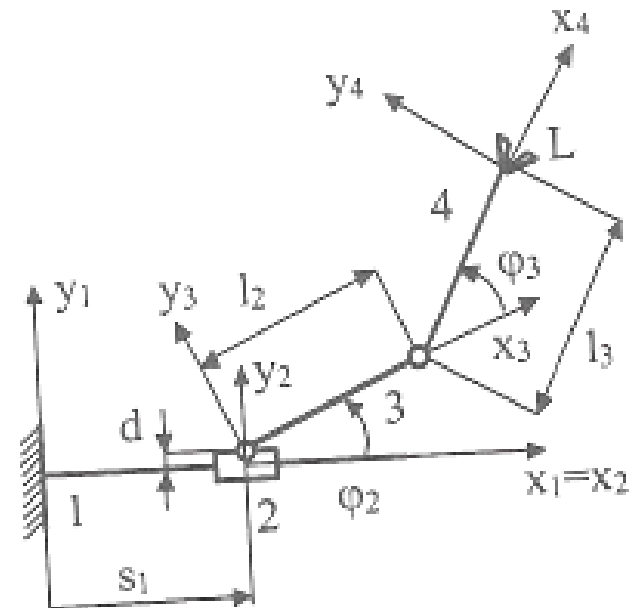
$$x_{1L} = s_1 + (l_2 + l_3 \cos \varphi_3) \cos \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3$$

$$y_{1L} = d + (l_2 + l_3 \cos \varphi_3) \sin \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3$$

Časovou derivací získáme rychlost a zrychlení

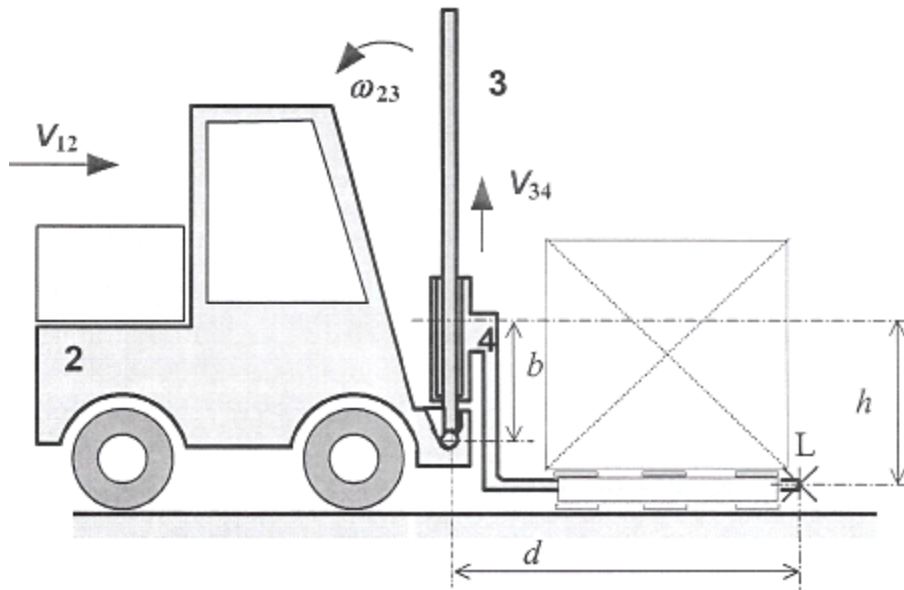
$$v_{1L} = \dot{T}_{14} r_{4L} + T_{14} \dot{r}_{4L} = \dot{T}_{14} r_{4L}$$

$$a_{1L} = \ddot{T}_{14} r_{4L} + \dot{T}_{14} \dot{r}_{4L} + T_{14} \ddot{r}_{4L} + \dot{T}_{14} \dot{r}_{4L} = \ddot{T}_{14} r_{4L}$$



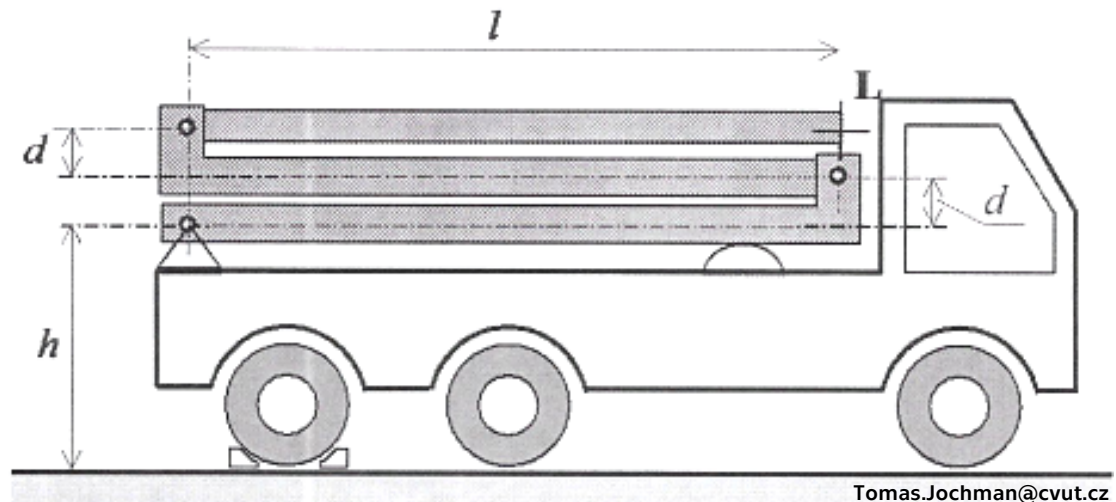
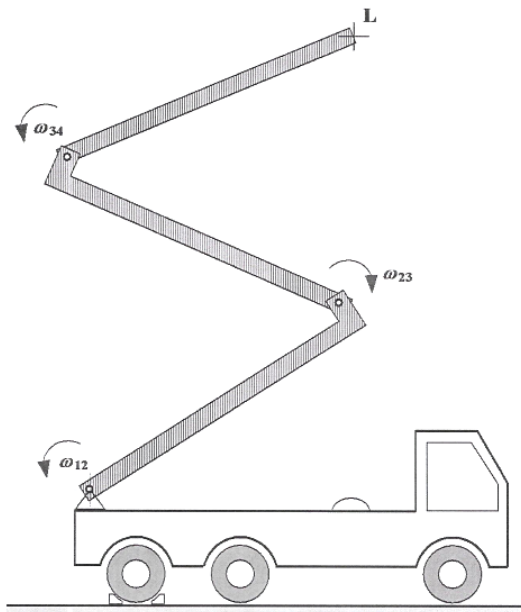
Kinematika tělesa – příklad 2 – VZV

- Definujte polohu koncového bodu ližin vysokozdvížného vozíku (bod L na obrázku), který jede rychlostí v_{12} při současném sklápění zdvihacího mechanismu směrem k vozíku úhlovou rychlostí ω_{23} a zvedání palety s nákladem o rychlosti v_{34}
 - Ekvivalent 3DOF manipulátoru**



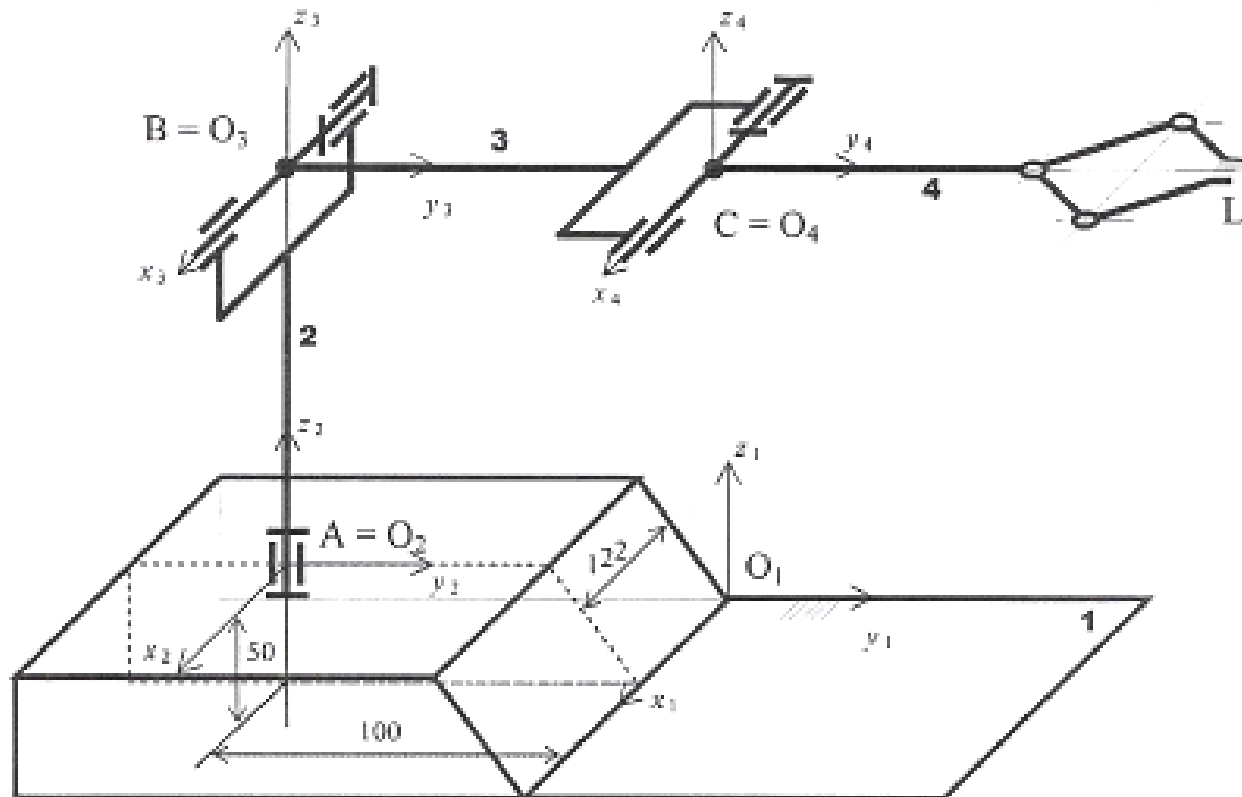
Kinematika tělesa – příklad 3 – Pumpa na beton

- Definujte polohu koncového bodu pumpy na beton (bod L na obrázku), který se při rozkládání mechanismu pohybuje úhlovými rychlostmi ω_{12} , ω_{23} a ω_{34} .
 - Ekvivalent 3DOF manipulátoru typu SCARA (bez osy Z)



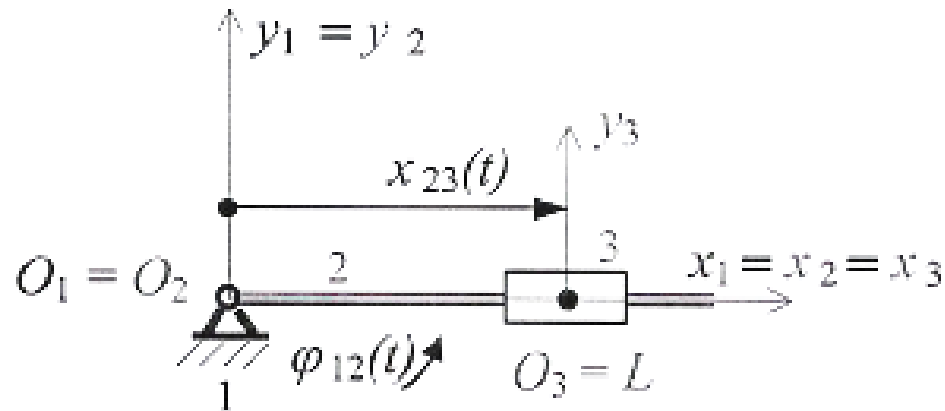
Kinematika tělesa – příklad 4 – 3 DOF robot

- Definujte polohu TCP (bod L na obrázku) koncového efektoru robotu v kartézských souřadnicích (O_1).



Kinematika tělesa – příklad 5 – Současné pohyby

- Definujte polohu bodu L při současném pohybu $\varphi_{12}(t)$ a $x_{23}(t)$.



Kinematika tělesa – příklad 5 – Současné pohyby

- Kinematika současných pohybů

Poloha bodu L

$$x_{1L} = x_{23} \cos \varphi_{12}$$

$$y_{1L} = x_{23} \sin \varphi_{12}$$

Rychlost bodu L

$$v_{x1L} = \dot{x}_{23} \cos \varphi_{12} - x_{23} \dot{\varphi}_{12} \sin \varphi_{12}$$

$$v_{y1L} = \underbrace{\dot{x}_{23} \sin \varphi_{12}}_{\text{relativní}} + \underbrace{x_{23} \dot{\varphi}_{12} \cos \varphi_{12}}_{\text{unášivá}}$$

Zrychlení bodu L

$$a_{x1L} = \ddot{x}_{23} \cos \varphi_{12} - \ddot{\varphi}_{12} x_{23} \sin \varphi_{12} - \dot{\varphi}_{12}^2 x_{23} \cos \varphi_{12} - 2\dot{x}_{23} \dot{\varphi}_{12} \sin \varphi_{12}$$

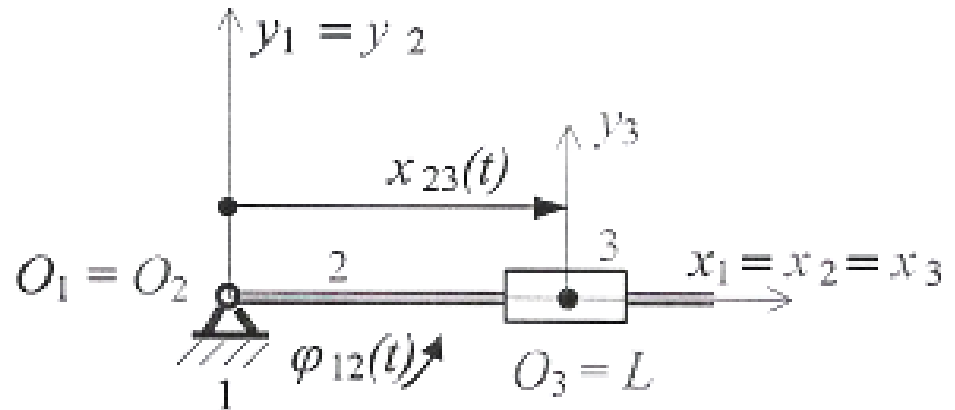
$$a_{y1L} = \ddot{x}_{23} \sin \varphi_{12} + \ddot{\varphi}_{12} x_{23} \cos \varphi_{12} - \dot{\varphi}_{12}^2 x_{23} \sin \varphi_{12} + 2\dot{x}_{23} \dot{\varphi}_{12} \cos \varphi_{12}$$

relativní

unášivé tečné

unášivé normálové

Coriolisovo



Děkuji za pozornost.

