

Prioritní fronta a příklad použití v úloze hledání nejkratších cest

Jan Faigl

Katedra počítačů

Fakulta elektrotechnická

České vysoké učení technické v Praze

Přednáška 12

B0B36PRP – Procedurální programování



Přehled témat

- Část 1 – Prioritní fronta polem a haldou

Prioritní fronta polem

Halda

- Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`

- Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)



Část I

Část 1 – Prioritní fronta (Halda)



Obsah

Prioritní fronta polem

Halda



Prioritní fronta polem – rozhraní

- V případě implementace prioritní fronty polem můžeme využít jedno pole pro hodnoty a druhé pole pro uložení priority daného prvku.

Implementace vychází z lec11/queue_array.h a lec11/queue_array.c

```
typedef struct {
    void **queue;      // Pole ukazatelů na jednotlivé prvky
    int *priorities;  // Pole hodnot priorit jednotlivých prvků
    int count;
    int head;
    int tail;
} queue_t;
```

- Další rozhraní (jména a argumenty funkcí) mohou zůstat identické jako u implementace spojovým seznamem.

Viz předchozí přednáška.

```
void queue_init(queue_t **queue);
void queue_delete(queue_t **queue);
void queue_free(queue_t *queue);
_Bool queue_is_empty(const queue_t *queue);

int queue_push(void *value, int priority,
               queue_t *queue);
void* queue_pop(queue_t *queue);
void* queue_peek(const queue_t *queue);
```



Prioritní fronta polem 1/3 – push()

- Funkce `push()` je až na uložení priority identická s verzí bez priorit.

```
int queue_push(void *value, int priority, queue_t *queue)
{
    int ret = QUEUE_OK; // by default we assume push will be OK
    if (queue->count < MAX_QUEUE_SIZE) {
        queue->queue[queue->tail] = value;

        // store priority of the new value entry
        queue->priorities[queue->tail] = priority;

        queue->tail = (queue->tail + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        queue->count += 1;
    } else {
        ret = QUEUE_MEMFAIL;
    }
    return ret;
}
// lec12/priority_queue-array/priority_queue-array.c
```

- Funkce `peek()` a `pop()` potřebují prvek s nejnižší (nejvyšší) prioritou.
 - Nalezení prvku z „čela“ fronty realizujeme funkcí `getEntry()`, kterou následně využijeme jak v `peek()`, tak v `pop()`.



Prioritní fronta polem 2/3 – getEntry()

- Nalezení nejmenšího (největšího) prvku provedeme lineárním prohledáním aktuálních prvků uložených ve frontě (poli).

```
static int getEntry(const queue_t *const queue)
{
    int ret = -1;
    if (queue->count > 0) {
        for (int cur = queue->head, i = 0; i < queue->count; ++i) {
            if (
                ret == -1 ||
                (queue->priorities[ret] > queue->priorities[cur])
            ) {
                ret = cur;
            }
            cur = (cur + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        }
    }
    return ret;
}
```

[lec12/priority_queue-array/priority_queue-array.c](#)



Prioritní fronta polem 3/3 – peek() a pop()

- Funkce `peek()` využívá lokální (static) funkce `getEntry()`.

```
void* queue_peek(const queue_t *queue)
{
    return queue_is_empty(queue) ? NULL : queue->queue[getEntry(queue)];
}
```

- Ve funkci `pop()` zaplníme položku vyjmutého prvku prvkem ze startu.

```
void* queue_pop(queue_t *queue)
{
    void *ret = NULL;
    int bestEntry = getEntry(queue);
    if (bestEntry >= 0) { // entry has been found
        ret = queue->queue[bestEntry];
        if (bestEntry != queue->head) { //replace the bestEntry by head
            queue->queue[bestEntry] = queue->queue[queue->head];
            queue->priorities[bestEntry] = queue->priorities[queue->head];
        }
        queue->head = (queue->head + 1) % MAX_QUEUE_SIZE;
        queue->count -= 1;
    }
    return ret;
}
```



Prioritní fronta polem – příklad použití

- Použití je identické s implementací spojovým seznamem.

```
make && ./demo-priority_queue-array
ccache clang -c priority_queue-array.c -O2 -o priority_queue-array.o
ccache clang priority_queue-array.o demo-priority_queue-array.o -o demo-
priority_queue-array
Add 0 entry '2nd' with priority '2' to the queue
Add 1 entry '4th' with priority '4' to the queue
Add 2 entry '1st' with priority '1' to the queue
Add 3 entry '5th' with priority '5' to the queue
Add 4 entry '3rd' with priority '3' to the queue

Pop the entries from the queue
1st
2nd
3rd
4th
5th
```

[lec12/priority_queue-array/priority_queue-array.h](#)

[lec12/priority_queue-array/priority_queue-array.c](#)

[lec12/priority_queue-array/demo-priority_queue-array.c](#)



Prioritní fronta spojovým seznamem nebo polem a výpočetní náročnost

- V naivní implementaci prioritní fronty jsme zohlednění priority „odložili“ až do doby, kdy potřebujeme odebrat prvek z fronty.
- Při odebrání (nebo vrácení) nejmenšího prvku v nejnepříznivějším případě musíme projít všechny položky.
- To může být **výpočetně náročné** a raději bychom chtěli „udržovat“ prvek připravený.
 - Můžeme to například udělat zavedením položky **head**, ve které bude aktuálně nejnižší (nejvyšší) vložený prvek do fronty.
 - Prvek **head** aktualizujeme v metodě **push()** porovnáním hodnoty aktuálně vkládaného prvku.
 - Tím zefektivníme operaci **peek()**.
 - V případě odebrání prvku, však musíme frontu znovu projít a najít nový prvek.

Alternativně můžeme použít sofistikovanější datovou strukturu, která nám umožní efektivně udržovat hodnotu nejmenšího prvku a to jak při operaci vložení **push()** tak při operaci vyjmutí **pop()** prvku z prioritní fronty.



Obsah

Prioritní fronta polem

Halda



Halda

- Halda je dynamická datová struktura, která má „tvar“ binárního stromu a uspořádání prioritní fronty.
- Každý prvek haldy obsahuje hodnotu a dva potomky, podobně jako binární strom.
- **Vlastnosti haldy** – „*Heap property*“.
 - **Hodnota každého prvku je menší než hodnota libovolného potomka.**
 - Každá úroveň binárního stromu haldy je plná, kromě poslední úrovně, která je zaplněna zleva doprava.
- Prvky mohou být odebrány pouze přes kořenový uzel.
- Vlastnost haldy zajišťuje, že **kořen je vždy prvek s nejnižším/nejvyšším ohodnocením.**

Binární plný strom

V případě binárního plného stromu je složitost procházení úměrná hloubce stromu, která je pro n prvků úměrná $\log_2(n)$. Složitost operací `push()`, `pop()`, `peek()` tak můžeme očekávat nikoliv $O(n)$ (jako v případě předchozí implementace prioritní fronty polem a spojovým seznamem), ale $O(\log n)$.

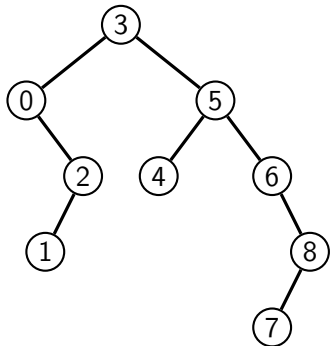


Binární vyhledávací strom vs halda

Binární vyhledávací strom

- Může obsahovat prázdná místa.
- Hloubka stromu se může měnit.

Zajistit vyvážený strom je implementačně náročnější než implementace haldy.



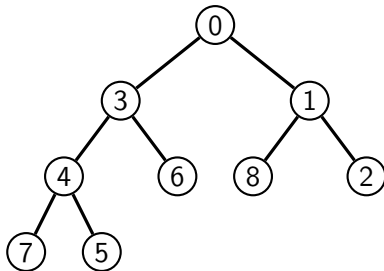
Halda

- Binární plný strom

Hloubka stromu vždy $\lfloor \log_2(n) \rfloor$.

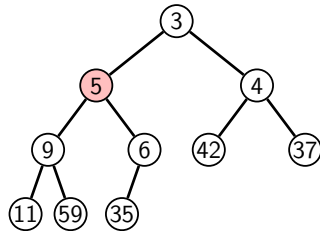
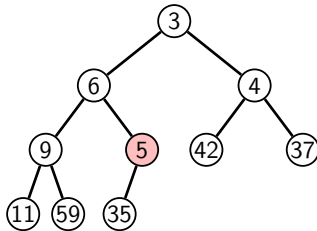
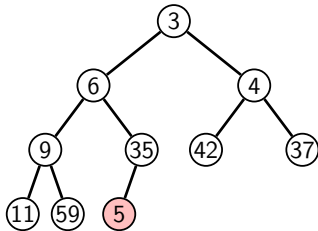
- Kořen stromu je vždy prvek s nejnižší (nejvyšší) hodnotou.
- Každý podstrom splňuje vlastnost haldy.

Heap property



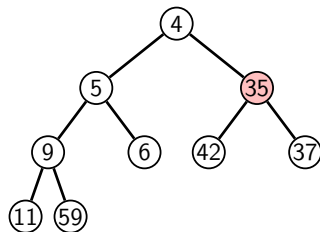
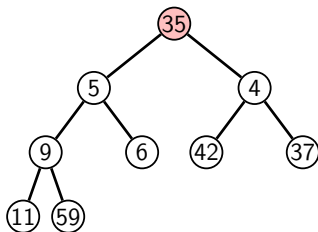
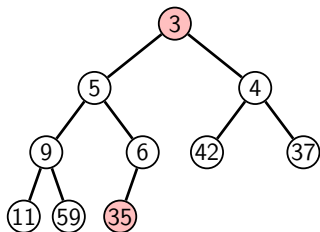
Halda – přidání prvku `push()`

- Po každém provedení operace `push()` musí být splněny vlastnosti haldy.
- Prvek přidáme na konec haldy, tj. na první volnou pozici (vlevo) na nejnižší úrovni haldy.
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s nadřazeným prvkem (předkem).
V nejnepříznivějším případě prvek „probublá“ až do kořene stromu.



Halda – odebrání prvku `pop()`

- Při operaci `pop()` odebereme kořen stromu.
- Prázdné místo nahradíme nejpravějším listem.
- Zkontrolujeme, zdali je splněna podmínka haldy, pokud ne, zaměníme prvek s potomkem a postup opakujeme. *V nejnepříznivějším případě prvek „probublá“ až do listu stromu.*



- Jak zjistit nejpravější list?
 - V případě implementace spojovou strukturou (nelineární) můžeme explicitně udržovat odkaz.
 - **Binární plný strom můžeme efektivně reprezentovat polem** – pak nejpravější list je poslední prvek v poli.



Prioritní fronta haldou

- Prvky ukládáme do haldy a při každém vložení / odebrání zajišťujeme, aby platily vlastnosti **haldy**.
- Operace **peek()** má konstantní složitost a nezáleží na počtu prvků ve frontě, nejnižší prvek je vždy kořen.

Asymptotická složitost v notaci velké O je $O(1)$.

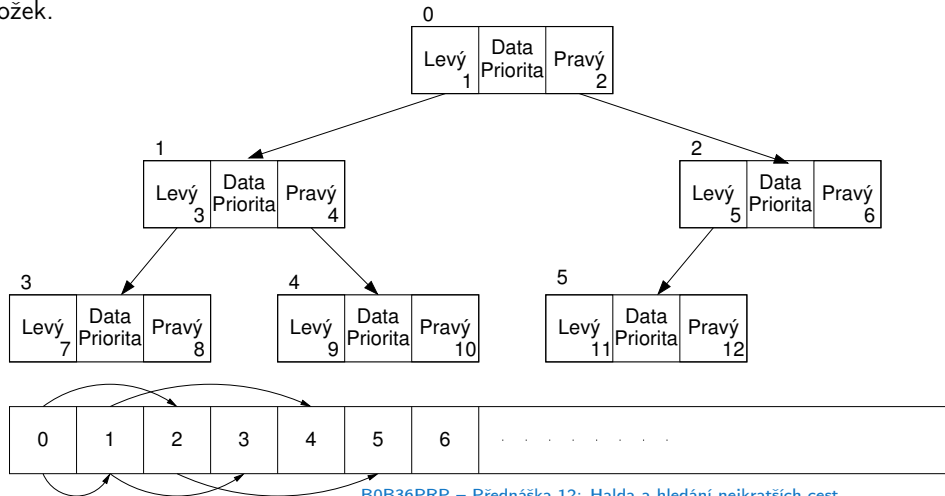
- Operace **push()** a **pop()** udržují vlastnost haldy záměnami prvku až do hloubky stromu.

Pro binární plný strom je hloubka stromu $\log_2(n)$, kde n je aktuální počet prvků ve stromu, odtud složitost operace $O(\log(n))$.



Reprezentace binárního stromu polem

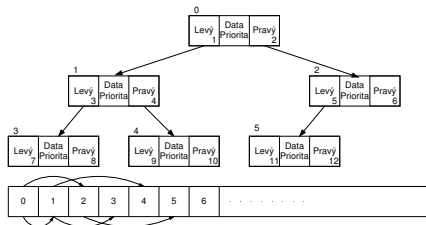
- Binární plný strom můžeme reprezentovat lineární strukturou.
- V případě známého maximální počtu prvků v haldě, pak jednoduše předalokovaným polem položek.



Halda jako binární plný strom reprezentovaný polem

- Pro definovaný maximální počet prvků v haldě si předalokujeme pole o daném počtu prvků.
- Binární **plný strom** má všechny vrcholy na úrovni rovné hloubce stromu co nejvíce vlevo.
- Kořen stromu je první prvek s indexem 0, následníky prvku na pozici i lze v poli určit jako prvky s indexy:
 - levý následník: $i_{levý} = 2i + 1$;
 - pravý následník: $i_{pravý} = 2i + 2$.

Podobně lze odvodit vztah pro předchůdce.



- Kořen stromu reprezentuje nejprioritnější prvek.

Např. s nejmenší hodnotou nebo maximální prioritou.



Operace vkládání a odebírání prvků

- I v případě reprezentace polem pracují operace vkládání a odebírání identicky.
 - Funkce `push()` přidá prvek jako další prvek v poli a následně propaguje prvek směrem nahoru až **je splněna vlastnost haldy**.
 - Při odebrání prvku funkcí `pop()` je poslední prvek v poli umístěn na začátek pole (tj. kořen stromu) a propagován směrem dolů až **je splněna vlastnost haldy**.
- Dochází pouze k vzájemnému zaměňování hodnot na pozicích v poli (haldě).

Z indexu prvku v poli vždy můžeme určit jak levého a pravého následníka, tak i předcházející prvek (rodič) v pohledu na haldu jako binární strom.
- Hlavní výhodou reprezentace polem je přístup do předem alokovaného bloku paměti.

Všechny prvky můžeme jednoduše projít v jedné smyčce, například při výpisu.
- Ověření zdali implementace operací `push()` a `pop()` zachovává **podmínku haldy** můžeme realizovat ověřující funkcí `is_heap()`.



Příklad implementace pq_is_heap()

- Pro každý prvek haldy musí platit, že jeho hodnota je menší než levý i pravý následník.

```
typedef struct {
    int size;    // the maximal number of entries
    int len;    // the current number of entries
    int *cost;  // array with costs - lowest cost is highest priority
    int *label; // array with labels (each label has cost/priority)
} pq_heap_s;

_Bool pq_is_heap(pq_heap_s *pq, int n)
{
    _Bool ret = true;
    int l = 2 * n + 1; // left successor
    int r = l + 1;     // right successor
    if (l < pq->len) {
        ret = (pq->cost[l] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, l);
    }
    if (r < pq->len) {
        ret = ret // if ret is false, further expression is not evaluated
            &&
            ( (pq->cost[r] < pq->cost[n]) ? false : pq_is_heap(pq, r) );
    }
    return ret;
}
```



Příklad implementace push()

- Prvek přidáme na konec pole a iterativně kontrolujeme, zdali je splněna vlastnost haldy. Pokud ne, prvek zaměníme s předchůdcem.

```
#define GET_PARENT(i) ((i-1) >> 1) // parent is (i-1)/2

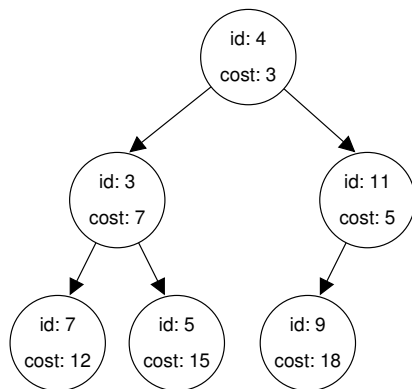
_Bool pq_push(pq_heap_s *pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    if (pq && pq->len < pq->size && label >= 0 && label < pq->size) {
        pq->cost[pq->len] = cost; //add the cost to the next free slot
        pq->label[pq->len] = label; //add label of new entry
        int cur = pq->len; // index of the entry added to the heap
        int parent = GET_PARENT(cur);
        while (cur >= 1 && pq->cost[parent] > pq->cost[cur]) {
            pq_swap(pq, parent, cur); // swap parent<->cur
            cur = parent;
            parent = GET_PARENT(cur);
        }
        pq->len += 1;
        ret = true;
    }
    // assert(pq_is_heap(pq, 0)); // testing the implementation
    return ret;
}
```



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



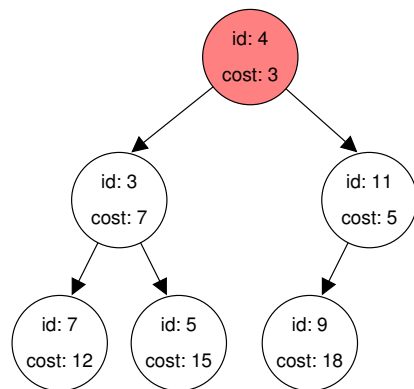
id:	4	3	11	7	5	9
cost:	3	7	5	12	15	18
	0	1	2	3	4	5	6



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.**
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



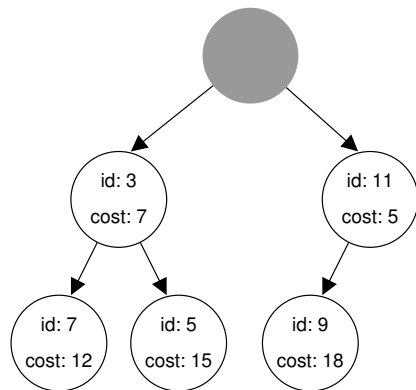
id:	4	3	11	7	5	9
cost:	3	7	5	12	15	18
	0	1	2	3	4	5	6



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním pop() odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



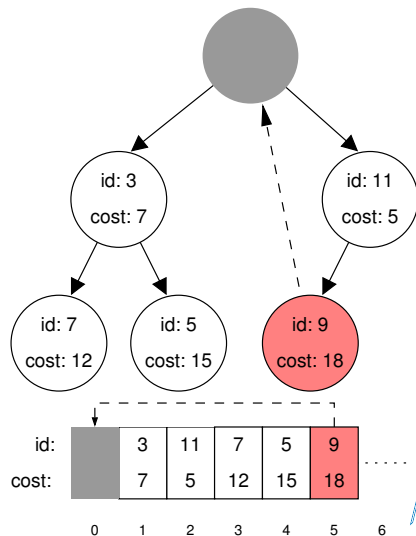
id:		3	11	7	5	9
cost:		7	5	12	15	18
	0	1	2	3	4	5	6



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.**
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

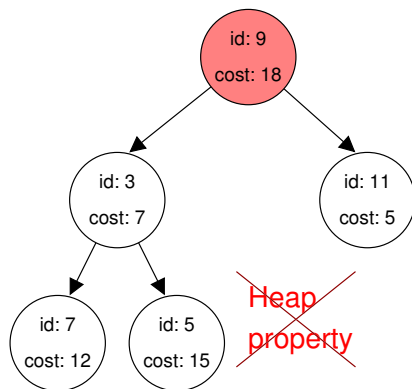
Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.**
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$.



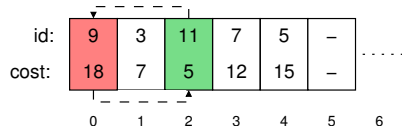
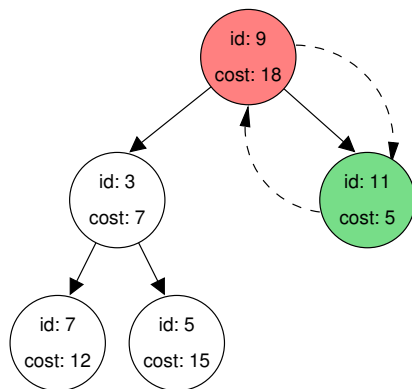
id:	9	3	11	7	5	-
cost:	18	7	5	12	15	-	
	0	1	2	3	4	5	6



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
 - Nejmenší prvek je kořenem stromu.
 - Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
 - Na jeho místo umístíme poslední prvek.
 - Strom však nesplňuje podmínku haldy.
 - Proto provedeme záměnu s následníky.**
- V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
 - Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i + 2$.



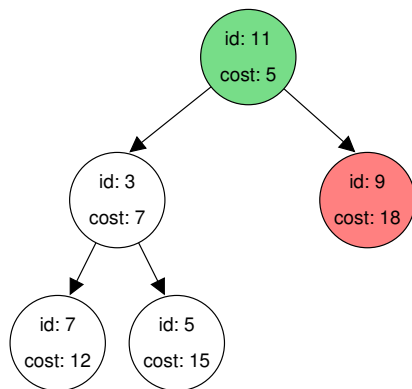
Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.

V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.

- A strom opět splňuje vlastnost haldy.**
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



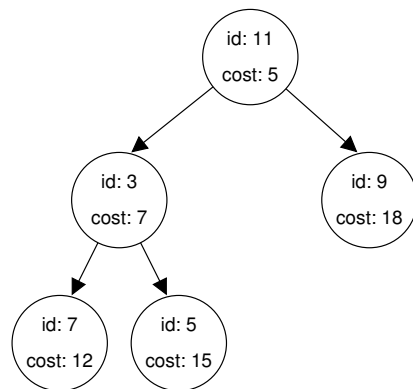
id:	11	3	9	7	5	-	...
cost:	5	7	18	12	15	-	...
	0	1	2	3	4	5	6



Příklad volání pop()

- Halda je reprezentovaná binárním polem.
- Nejmenší prvek je kořenem stromu.
- Voláním `pop()` odebíráme kořen stromu.
- Na jeho místo umístíme poslední prvek.
- Strom však nesplňuje podmínku haldy.
- Proto provedeme záměnu s následníky.
 - V tomto případě volíme pravého následníka, neboť jeho hodnota je nižší než hodnota levého následníka.*
- A strom opět splňuje vlastnost haldy.
- Záměny provádíme v poli a využíváme vlastnosti plného binárního stromu.

Levý potomek prvku haldy na pozici i je $2i+1$, pravý potomek je na pozici $2i+2$.



id:	11	3	9	7	5	-
cost:	5	7	18	12	15	-
	0	1	2	3	4	5	6



Část II

Část 2 – Příklad využití prioritní fronty v úloze hledání nejkratší cesty v grafu



Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

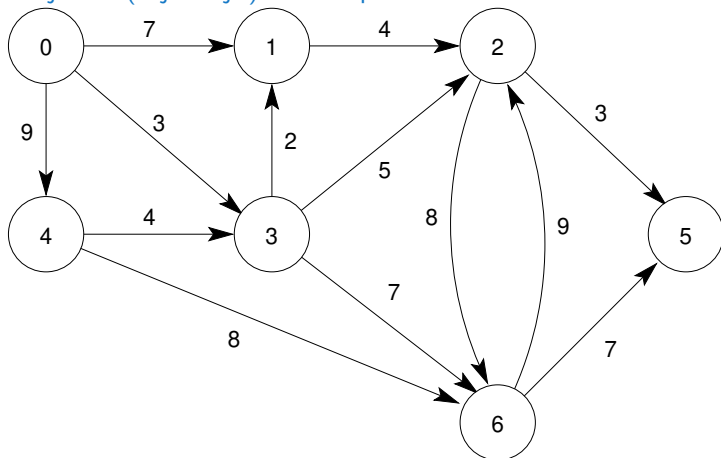
Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



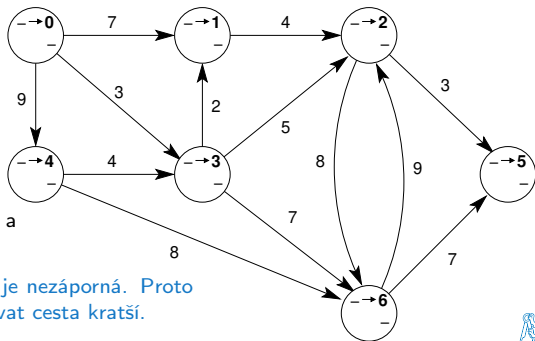
Hledání nejkratší cesty v grafu

- Uzly grafu mohou reprezentovat jednotlivá místa a hrany cestu, jak se mezi místy pohybovat.
- Ohodnocení (cena) hrany může odpovídat náročnosti pohybu mezi dvě sousedními uzly.
- Cílem je nalézt nejkratší (nejlevnější) cestu např. z uzlu 0 do všech ostatních uzlů.



Dijkstrův algoritmus

- Necht' má graf pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel:
 - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu;
 - udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu.
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů.
 - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme délku cesty do následníků.
 - Následně vybereme takový uzel,
 - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň má aktuálně nejnižší ohodnocení.
 - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
 - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
 - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

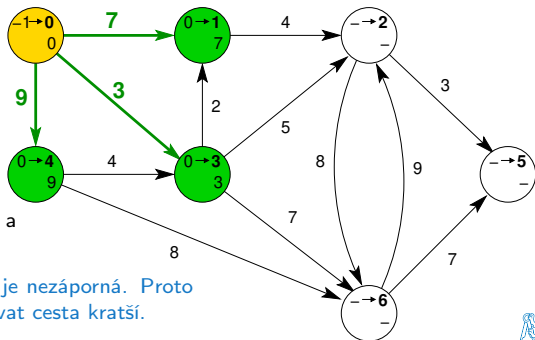


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



Dijkstrův algoritmus

- Necht' má graf pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel:
 - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu;
 - udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu.
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů.
 - **Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme délku cesty do následníků.**
 - Následně vybereme takový uzel,
 - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň má aktuálně nejnižší ohodnocení.
 - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
 - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
 - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

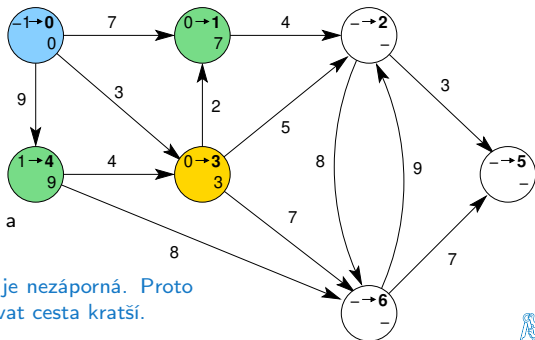


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



Dijkstrův algoritmus

- Necht' má graf pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel:
 - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu;
 - udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu.
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů.
 - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme délku cesty do následníků.
 - **Následně vybereme takový uzel,**
 - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň **má aktuálně nejnižší ohodnocení.**
 - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
 - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
 - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

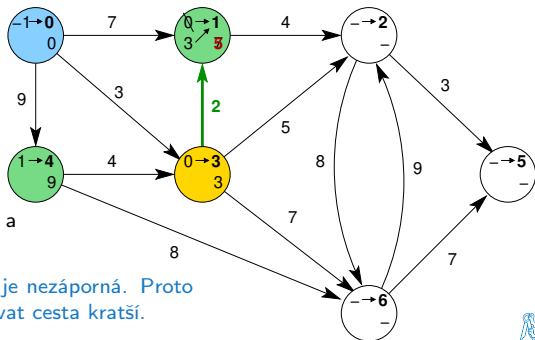


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



Dijkstrův algoritmus

- Necht' má graf pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel:
 - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu;
 - udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu.
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů.
 - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme délku cesty do následníků.
 - Následně vybereme takový uzel,
 - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň má aktuálně nejnižší ohodnocení.
 - **Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.**
 - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
 - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

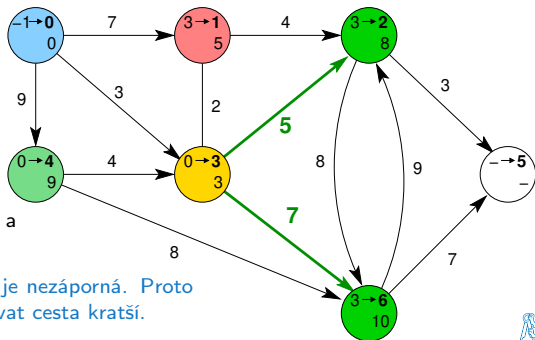


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



Dijkstrův algoritmus

- Necht' má graf pouze kladné ohodnocení hran, pak pro každý uzel:
 - nastavíme aktuální cenu nejkratší cesty z výchozího uzlu;
 - udržujeme odkaz na bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě ze startovního uzlu.
- Hledání cesty je postupná aktualizace ceny nejkratší cesty do jednotlivých uzlů.
 - Začneme z výchozího uzlu (cena 0) a aktualizujeme délku cesty do následníků.
 - Následně vybereme takový uzel,
 - do kterého již existuje nějaká cesta z výchozího uzlu a zároveň má aktuálně nejnižší ohodnocení.
 - Postup opakujeme dokud existuje nějaký dosažitelný uzel.
 - Tj. uzel, do kterého vede cesta z výchozího uzlu a
 - má již ohodnocení a předchůdce (*zelené uzly*).

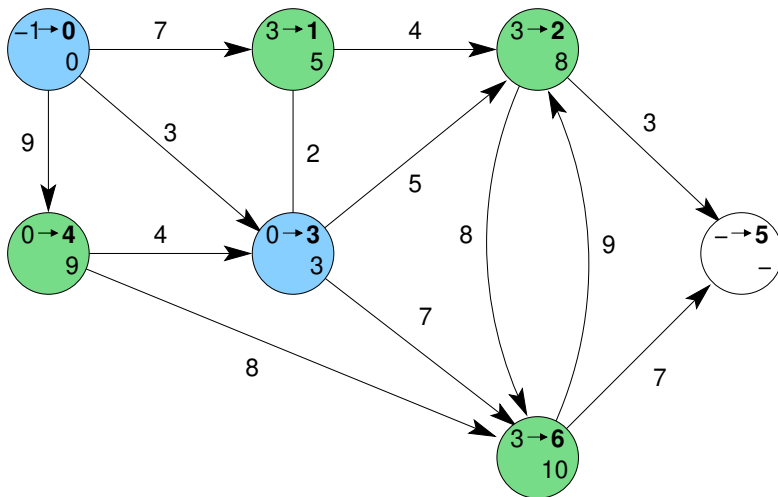


Ohodnocení uzlů se může pouze snižovat, cena hran je nezáporná. Proto pro uzel s aktuálně nejkratší cestou již nemůže existovat cesta kratší.



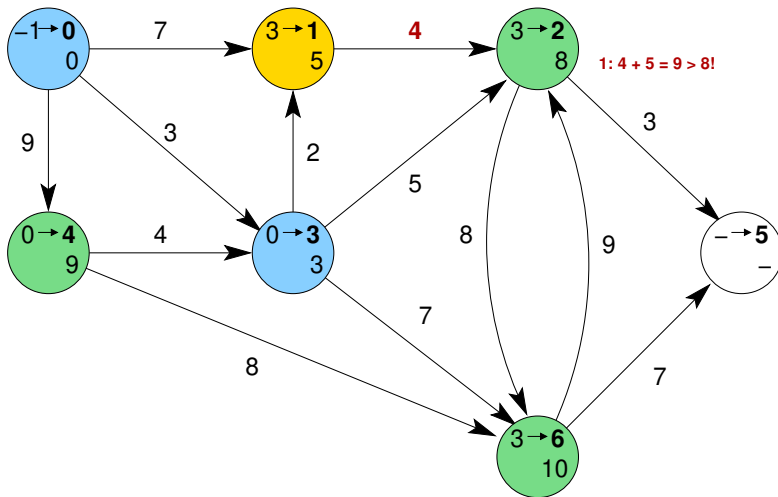
Příklad postupu řešení (pokračování)

1: Po 2. expanzi má uzel 2 (vlevo nahoře) nejkratší cestu přes uzel 3.



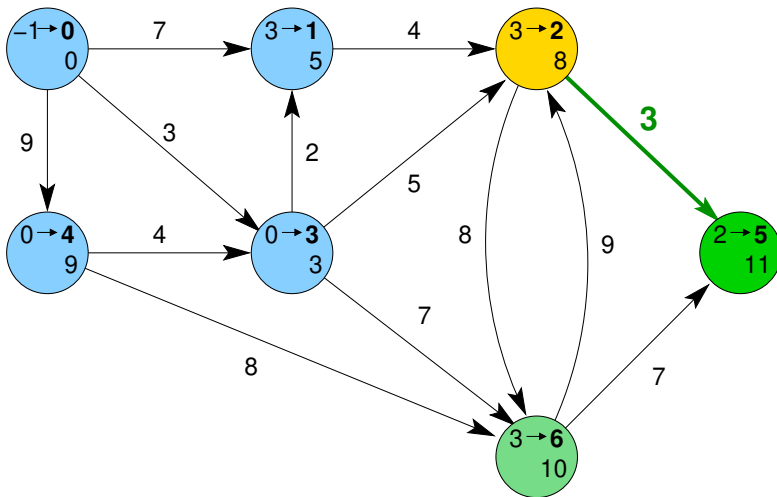
Příklad postupu řešení (pokračování)

2: Expanze uzlu 1 nevede na kratší cestu do uzlu 2.



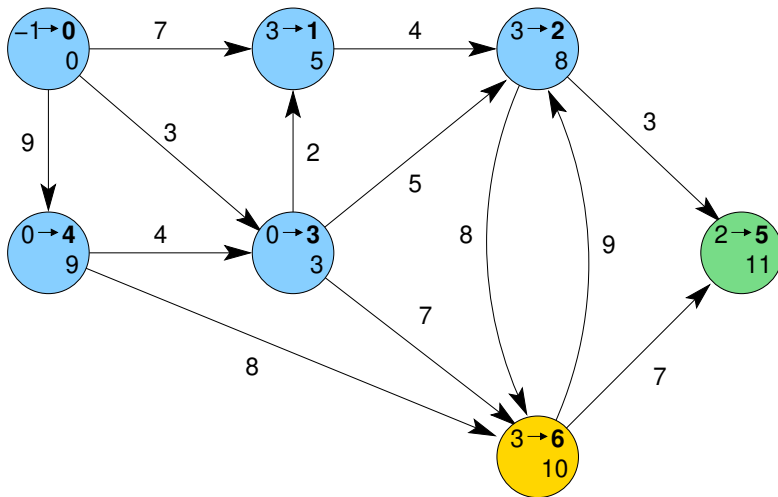
Příklad postupu řešení (pokračování)

3: Expanzí uzlu 2 získáme cestu též do uzlu 5.



Příklad postupu řešení (pokračování)

4: Dalšími expanzemi již cesty nezlepšujeme.



Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



Příklad řešení úlohy hledání nejkratších cest v grafu

Řešení úlohy obsahuje tři části.

- **Vstupní data** (grafu) – paměťová reprezentace a načtení hodnot.

Formát vstupního souboru.

- Vstupní graf je zadán jako seznam hran.

`from to cost` – Viz 10. přednáška.

- Dalším vstupem je výchozí uzel.

Pro jednoduchost budeme uvažovat 1. uzel (0).

- **Výstupní data** (nejkratší cesty) – paměťová reprezentace a uložení (zápis).

Formát výstupního souboru.

- Všechny nejkratší cesty vypíšeme jako seznam vrcholů s cenou (délkou) nejkratší cesty a bezprostředním předchůdcem (indexem) uzlu na nejkratší cestě z výchozího uzlu (uzel 0).

`label cost parent`

- **Algoritmu** hledání cest – Dijkstrův algoritmus.

- Algoritmus je relativně přímočarý v každém kroku expandujeme uzel s aktuálně nejkratší cestou z výchozího uzlu.

*V každém kroku potřebujeme uzel s aktuálně nejnižší délkou cesty – použijeme **prioritní frontu**.*



Vstupní graf, reprezentace grafu a řešení

- Graf je zadán jako seznam hran v souboru, který můžeme načíst funkcí `load_graph_simple()` z `lec10/*/load_simple.c`.

- Graf je seznam hran.

```
typedef struct {
    int from;
    int to;
    int cost;
} edge_t;
```

```
typedef struct {
    edge_t *edges;
    int num_edges;
    int capacity;
} graph_t;
```

`lec10/graph.h`

```
0 5 74
1 6 56
2 8 11
2 9 27
2 4 31
2 3 41
2 1 26
3 5 24
3 9 12
4 9 13
...
```

- Navíc využijeme toho, že jsou hrany uspořádané.

- Hrany vycházející z uzlu určíme jako index první hrany `edge_start`
- a počet hran `edge_count`.

```
typedef struct {
    int edge_start;
    int edge_count;
    int parent;
    int cost;
} node_t;
```

- Dále potřebujeme pro vlastní řešení u každého uzlu uložit cenu nejkratší cesty `cost` a předcházející uzel na nejkratší cestě `parent`.



Datová reprezentace

- Řešení implementujeme v modulu `dijkstra`.
- Všechny potřebné datové struktury zahrneme do jediné struktury `dijkstra_t` reprezentující všechna data řešení úlohy.

```
typedef struct {  
    graph_t *graph;  
    node_t *nodes;  
    int num_nodes;  
    int start_node;  
} dijkstra_t;
```

- Pro alokaci použijeme `myMalloc()`, `allocate_graph()` a inicializujeme položky struktury na výchozí hodnoty.

```
void* dijkstra_init(void)  
{  
    dijkstra_t *dij = myMalloc(  
        sizeof(dijkstra_t));  
    dij->nodes = NULL;  
    dij->num_nodes = 0;  
    dij->start_node = -1;  
    dij->graph = allocate_graph();  
    return dij;  
}
```

```
#include <stdlib.h>  
  
void* myMalloc(size_t size)  
{  
    void *ret = malloc(size);  
    if (!ret) {  
        fprintf(stderr, "Malloc failed!\n");  
        exit(-1)  
    }  
    return ret;  
}
```

[lec11/my_malloc.c](#)



Načtení grafu a inicializace uzlů 1/2

- Hrany načteme např. `load_graph_simple()` nebo impl. HW09.

Pro jednoduchost a lepší přehlednost zde předpokládáme bezchybné načtení.

- Dále potřebujeme zjistit počet vrcholů.

Lze implementovat přímo do načítání.

- Alokujeme paměť pro uzly a nastavíme (bezpečné) výchozí hodnoty.

```
load_graph_simple(filename, dij->graph);
int m = -1;
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    const edge_t *const e = &(dij->graph->edges[i]);
    m = m < e->from ? e->from : m;
    m = m < e->to ? e->to : m;
} // smyčka pro určení maximálního počtu vrcholů

dij->num_nodes = m + 1; //m je index a začíná od 0 proto +1
dij->nodes = myMalloc(sizeof(node_t) * dij->num_nodes);
for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
    dij->nodes[i].edge_start = -1;
    dij->nodes[i].edge_count = 0;
    dij->nodes[i].parent = -1; // pokud neexistuje indikujeme -1
    // pro cenu volíme -1 ve výpise bude kratší než např. MAX_INT
    dij->nodes[i].cost = -1;
} // nastavení výchozích hodnot uzlů
```



Inicializace uzlů 2/2

- Nastavíme indexy hran jednotlivým uzlům.

```
for (int i = 0; i < dij->graph->num_edges; ++i) {
    int cur = dij->graph->edges[i].from;
    if (dij->nodes[cur].edge_start == -1) { // first edge
        // mark the first edge in the array of edges
        dij->nodes[cur].edge_start = i;
    }
    dij->nodes[cur].edge_count += 1; // increase no. of edges
}
```

Využíváme uspořádání vstupních dat.



Uložení řešení do souboru

- Po nalezení všech nejkratších cest (z uzlu 0) má každý uzel nastavenou hodnotu `cost` s délkou cesty a v `parent` index bezprostředního předchůdce na nejkratší cestě.

Případně -1 pokud cesta neexistuje.

```
_Bool dijkstra_save_path(void *dijkstra, const char *filename)
{
    _Bool ret = false;
    const dijkstra_t *const dij = (dijkstra_t*)dijkstra;
    if (dij) {
        FILE *f = fopen(filename, "w");
        if (f) {
            for (int i = 0; i < dij->num_nodes; ++i) {
                const node_t *const node = &(dij->nodes[i]);
                fprintf(f, "%i %i %i\n", i, node->cost, node->parent);
            } // end all nodes
            ret = fclose(f) == 0; // indicate eventuall error in saving
        }
    }
    return ret;
}
```

```
typedef struct {
    int edge_start;
    int edge_count;
    int parent;
    int cost;
} node_t;
```

Zápis řešení do souboru můžeme implementovat jednoduchým výpisem do souboru nebo implementací HW09.

lec12/dijkstra.c



Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s `push()` a `update()`



Prioritní fronta pro Dijkstraův algoritmus

- Součástí balíku `lec12/graph_search-array` je rozhraní `pq.h` pro implementaci prioritní fronty s funkcí `update()`.

```
void *pq_alloc(int size);
```

```
void pq_free(void *_pq);
```

```
_Bool pq_is_empty(const void *_pq);
```

```
_Bool pq_push(void *_pq, int label, int cost);
```

```
_Bool pq_update(void *_pq, int label, int cost);
```

```
_Bool pq_pop(void *_pq, int *oLabel);
```

`lec12/graph_search-array/pq.h`.

- Jedná se o relativně obecný předpis, který neklade zvláštní požadavky na vnitřní strukturu. V balíku je rozhraní implementované v modulu `pq_array-linear.c`, který obsahuje implementaci prioritní fronty polem s lineární složitostí funkcí `push()` a `pop()`.
- `lec12/graph_search-array` základní funkční řešení hledání nejkratší cesty, prioritní fronta implementována polem.



Prioritní fronta (polem) s push() a update()

- Při expanzi uzlu, můžeme do prioritní fronty vkládat uzly s cenou pro každou hranu vycházející z uzlu.
- Obecně může být hran výrazně více než počet uzlů. *Pro plný graf o n uzlech až n^2 hran.*
- Proto pro prioritní frontu implementujeme funkci `update()` a tím zaručíme, že ve frontě bude nejvýše tolik prvků, kolik je vrcholů.
- V prioritní frontě tak můžeme předalokovat maximální počet položek.
- Při volání `update()` však potřebujeme získat pozici daného uzlu v prioritní frontě a změnit jeho hodnotu.
 - Prvek v poli najdeme lineárním průchodem prvků ve frontě.
Budeme však mít lineární složitost!
 - *Pozici prvku v prioritní frontě uložíme do dalšího pole a získáme tak okamžitý přístup za cenu mírně složitějšího vkládání prvků a vyšších paměťových nároků.*

Operace `update()` bude mít výhodnou konstantní složitost.



Hledání nejkratších cest

- Využijeme implementaci prioritní fronty s `push()` a `update()`.

```
dij->nodes[dij->start_node].cost = 0; // inicializace
void *pq = pq_alloc(dij->num_nodes); // prioritní fronta
int cur_label;
pq_push(pq, dij->start_node, 0);
while ( !pq_is_empty(pq) && pq_pop(pq, &cur_label) ) {
    node_t *cur = &(dij->nodes[cur_label]); // pro snažší použití
    for (int i = 0; i < cur->edge_count; ++i) { // všechny hrany z uzlu
        edge_t *edge = &(dij->graph->edges[cur->edge_start + i]);
        node_t *to = &(dij->nodes[edge->to]);
        const int cost = cur->cost + edge->cost;
        if (to->cost == -1) { // uzel to nebyl dosud navštíven
            to->cost = cost;
            to->parent = cur_label;
            pq_push(pq, edge->to, cost); // vložení vrcholu do fronty
        } else if (cost < to->cost) { // uzel již v pq, proto
            to->cost = cost; // testujeme cost
            to->parent = cur_label; // a aktualizujeme odkaz (parent)
            pq_update(pq, edge->to, cost); // a prioritní frontu pq
        }
    } // smyčka přes všechny hrany z uzlu cur_label
} // prioritní fronta je prázdná
pq_free(pq); // uvolníme paměť
```

lec12/dijkstra.c



Příklad použití

- Základní implementace hledání cest s prioritní frontou implementovanou polem je dostupná v `lec12/graph_search-array`.
- Vytvoříme graf `g` programem `tdijkstra` např. o max 1000 vrcholech.
`./tdijkstra -c 1000 g`
- Program zkompilujeme a spustíme např.
`./tgraph_search g s.`
- Programem `tdijkstra` můžeme vygenerovat referenční řešení např.
`./tdijkstra g s.ref.`
- a naše řešení pak můžeme porovnat např.
`diff s s.ref.`



Lineární prioritní fronta vs efektivní implementace

- Ukázková implemetace v `lec12/graph_search-array`, je sice funkční, pro velké grafy je však výpočet pomalý. *Např. pro graf s 1 mil. vrcholů trvá načtení, nalezení všech nejkratší cest a uložení výsledku přibližně 120 sekund na Intel Skylake@3.3GHz.*

```
./tdijkstra -c 1000000 g
/usr/bin/time ./tgraph_search g s
Load graph from g
Find all shortest paths from the node 0
Save solution to s
Free allocated memory
120.53 real      115.92 user      0.07 sys
```

- Referenční program `tdijkstra` najde řešení za cca 1 sekundu.

Těž k dispozici jako `tdijkstra.Linux` a `tdijkstra.exe`.

```
/usr/bin/time ./tdijkstra g s.ref
1.03 real      0.94 user      0.07 sys
```

- Oba programy vracejí identické výsledky

```
md5sum s s.ref
MD5 (s) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
MD5 (s.ref) = 8cc5ec1c65c92ca38a8dadf83f56e08b
```

V základní verzi řešení HW10 nesmí být hledání nejkratší cesty více než 2× pomalejší než referenční program.



Obsah

Popis úlohy

Návrh řešení

Příklad naivní implementace prioritní fronty polem

Implementace pq haldou s push() a update()



Prioritní fronta haldou s push() a update()

- Prioritní frontu implementujeme haldou reprezentovanou v poli.

Maximální počet prvků dopředu známe.

- Halda zaručí složitost operací `push()` a `pop()` $O(\log n)$.

Oproti $O(n)$ u jednoduché implemetace prioritní fronty polem.

- Je nutné udržovat vlastnost haldy. Pro kontrolu zachování „heap property“ implementujeme rozhraní `pq_is_heap()`.

```
_Bool pq_is_heap(void *heap, int n);
```

[lec12/graph_search/pq_heap.h](#)

- Pro zachování složitosti operací práce s haldou potřebujeme efektivně implementovat také funkci `update()`, tj. $O(\log n)$.

- Potřebujeme znát pozici daného uzlu v haldě.

Zavedeme pomocné pole s index `heapIDX`.

- Při hledání nejkratších cest se délka cesty pouze snižuje.
- Proto se aktualizovaný „uzel“ může v haldě pohybovat pouze směrem nahoru.

Jedná se tak o identický postup jako při přidání nového prvku funkcí `push()`. V tomto případě však prvek může startovat z prostředka stromu.



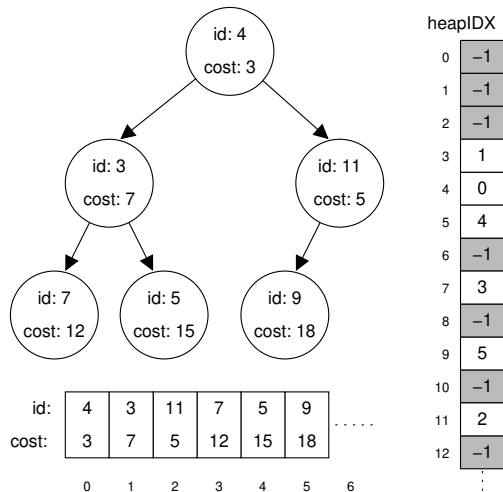
Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`.

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



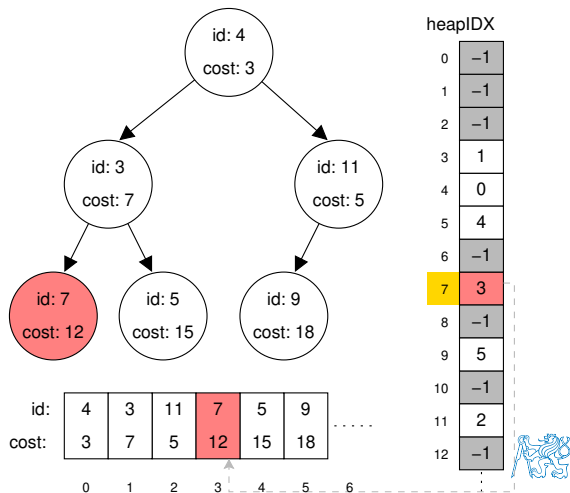
Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`.

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- **Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.**
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



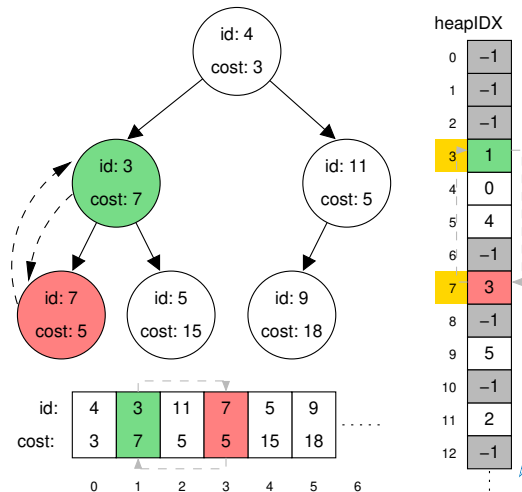
Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`.

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- **Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.**
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



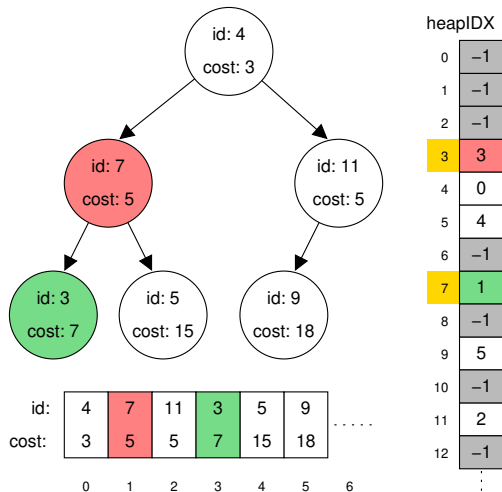
Příklad reprezentace haldy v poli a aktualizace ceny cesty

V haldě jsou uloženy délky dosud známých nejkratších cest pro vrcholy označené: 3, 4, 5, 7, 9, a 11.

- Při expanzi dalšího uzlu jsme našli kratší cestu do uzlu 7 s délkou 5.

Zavoláme `update(id=7, cost=5)`.

- Abychom mohli aktualizovat cenu v haldě, potřebujeme znát pozici uzlu v poli haldy.
- Proto vedle samotné haldy udržujeme pole, které je indexované číslem uzlu.
- Po aktualizaci ceny, není splněna vlastnost haldy. Provedeme záměnu.
- Při záměně udržujeme nejen prvky v samotné haldě, ale také pole `heapIDX` s pozicemi vrcholů v poli haldy.



Příklad implementace

- V `lec12/graph_search` je uveden příklad implementace hledání nejkratších cest s prioritní frontou realizovanou haldou.
- Implementace funkce `update()` využívá pole `heapIDX` pro získání pozice prvku v haldě, záměrně je však splnění vlastnosti haldy realizováno vytvořením nové haldy s aktualizovanou cenou uzlu.

```
_Bool pq_update(void *_pq, int label, int cost)
{
    _Bool ret = false;
    pq_heap_s *pq = (pq_heap_s*)_pq;
    pq->cost[pq->heapIDX[label]] = cost; // update the cost, but heap property is not satisfied
    // assert(pq_is_heap(pq, 0));

    pq_heap_s *pqBackup = (pq_heap_s*)pq_alloc(pq->size); //create backup of the heap
    pqBackup->len = pq->len;
    for (int i = 0; i < pq->len; ++i) { // backup the heap
        pqBackup->cost[i] = pq->cost[i]; //just cost and labels
        pqBackup->label[i] = pq->label[i];
    }
    pq->len = 0; //clear all vertices in the current heap
    for (int i = 0; i < pqBackup->len; ++i) { //create new heap from the backup
        pq_push(pq, pqBackup->label[i], pqBackup->cost[i]);
    }
    pq_free(pqBackup); // release the queue
    ret = true;
    return ret;
}
```

Součástí řešení 10. domácího úkolu je správná implementace funkce `update()`!



Příklad řešení a rychlost výpočtu

- Po úpravě funkce `update()` získáme prioritní frontu se složitostí operací $O(\log n)$ a vlastní výpočet bude relativně rychlý.
- Pro získání představy rychlosti výpočtu je v souboru `tgraph_search-time.c` volání dílčích funkcí modulu `dijkstra` s měřením reálného času (`make time`). `lec12/graph_search-time.c`

Alternativně lze řešit nástrojem `time` nebo pro Win platformu `lec12/bin/timeexec.exe`.

- Vytvoříme graf o 1 mil. uzlů (a cca 3 mil. hran) v souboru `/tmp/g`.

```
./bin/tdijkstra -c 10000000 /tmp/g
```

Verze s naivním `update()`

```
tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s1
Load graph from /tmp/g
Load time ....1179ms
Save solution to /tmp/s1
Solve time ...965875 ms
Save time ....273 ms
Total time ...967327ms
```

Upravená funkce `update()`

```
tgraph_search-time /tmp/g /tmp/s2
Load graph from /tmp/g
Load time ....1201ms
Save solution to /tmp/s2
Solve time ...620 ms
Save time ....279 ms
Total time ...2100ms
```

- Správnost řešení lze zkontrolovat program `tdijkstra`, např.

```
./bin/tdijkstra -t /tmp/g /tmp/s.
```



Další možnosti urychlení programu

- Kromě efektivní implementace prioritní fronty haldou, která je zásadní, lze běh programu dále urychlit
 - efektivnějším načítáním grafu
 - a ukládáním řešení do souboru.

```
tgraph_search s.tgs
lec11/tgraph_search
Load time ....1252ms
Solve time ...625 ms
Save time ....431 ms
Total time ...2308ms
```

```
tdijkstra -v g s.ref
Dijkstra ver. 2.3.4
Load time ....223ms
Solve time ...715ms
Save time ....106ms
Total time ...1044ms
```

```
dijkstra-pv g s.pv
HW10 Reference solution
Load time ....235ms
Solve time ...610 ms
Save time ....87 ms
Total time ...932ms
```

- HW10 – Soutěž v rychlosti programu – extra body navíc.
 - Na odevzdání stačí opravit funkci `update()` případně využít načítání a ukládání z HW09.
 - Dalšího urychlení lze dosáhnout lepší organizací paměti a datovými strukturami.

Jediný zásadní požadavek je implementace rozhraní dle `lec12/dijkstra.h`.



Část III

Část 3 – Zadání 10. domácího úkolu (HW10)



Zadání 10. domácího úkolu HW10

Téma: Integrace načítání grafu a prioritní fronta v úloze hledání nejkratších cest

Povinné zadání: **3b**; Volitelné zadání: **3b**; Bonusové zadání: [Soutěž o body](#)

- **Motivace:** Větší programový celek, využití existujícího kódu a efektivním implementace programu
- **Cíl:** Osvojit si integraci existujícího kódu do funkčního celku složeného z více souborů.
- **Zadání:** <https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b0b36prp/hw/hw10>
 - Funkce `update()` pro efektivní použití prioritní fronty implementované haldou v úloze hledání nejkratší cest v grafu.
 - **Volitelné zadání** rozšiřuje binární načítání/ukládání grafu o specifikovaný binární formát, tj. rozšíření HW 09.
 - **Bonusové zadání** spočívá v efektivnosti implementace tak, aby byl výsledný kód co možná nejrychlejší.
- **Termín odevzdání:** 01.01.2022, 23:59:59 PST.
- **Bonusová úloha:** 08.01.2022, 23:59:59 PST.



Shrnutí přednášky



Diskutovaná témata

- Prioritní fronta
 - Příklad implementace spojovým seznamem
 - Příklad implementace polem
- Halda - definice, vlastnosti a základní operace
- Reprezentace binárního plného stromu polem
- Prioritní fronta s haldou
- Hledání nejkratší cesty v grafu – využití prioritní fronty (resp. haldy)

`lec12/priority_queue-linked_list`

`lec12/priority_queue-array`

