Optimalizace

13. Vícekriteriální optimalizace

Tom Werner

FEL ČVUT

Částečně uspořádaná množina

Binární relace na množině Y je množina $R \subseteq Y \times Y$.

Binární relace je

- **reflexivní**, když $(x, x) \in R$ pro každé $x \in Y$,
- **transitivní**, když $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$,
- **antisymetrická**, když $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$.

Částečně uspořádaná množina

Binární relace na množině Y je množina $R \subseteq Y \times Y$.

Binární relace je

- **reflexivní**, když $(x, x) \in R$ pro každé $x \in Y$,
- **transitivní**, když $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$,
- **antisymetrická**, když $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$.

Kvazi-uspořádání (neboli **před-uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní a transitivní.

Částečné uspořádání (krátce **uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní, transitivní a antisymetrická.

Částečně uspořádaná množina

Binární relace na množině Y je množina $R \subseteq Y \times Y$.
Binární relace je

- **reflexivní**, když $(x, x) \in R$ pro každé $x \in Y$,
- **transitivní**, když $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$,
- **antisymetrická**, když $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$.

Kvazi-uspořádání (neboli **před-uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní a transitivní.

Částečné uspořádání (krátce **uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní, transitivní a antisymetrická.

Relaci (kvazi-)uspořádání obvykle píšeme infixově: místo $(x, y) \in R$ např. $x \preceq y$.
Pro rozlišení různých uspořádání pak lze užít symboly $\leq_1, \leq_2, \leq', \preceq'$, atd.

Částečně uspořádaná množina

Binární relace na množině Y je množina $R \subseteq Y \times Y$.
Binární relace je

- **reflexivní**, když $(x, x) \in R$ pro každé $x \in Y$,
- **transitivní**, když $(x, y) \in R$ a $(y, z) \in R$ implikuje $(x, z) \in R$,
- **antisymetrická**, když $(x, y) \in R$ a $(y, x) \in R$ implikuje $x = y$.

Kvazi-uspořádání (neboli **před-uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní a transitivní.

Částečné uspořádání (krátce **uspořádání**) na množině Y je binární relace na Y, která je reflexivní, transitivní a antisymetrická.

Relaci (kvazi-)uspořádání obvykle píšeme infixově: místo $(x, y) \in R$ např. $x \preceq y$.
Pro rozlišení různých uspořádání pak lze užít symboly $\leq_1, \leq_2, \leq', \preceq'$, atd.

Prvky $x, y \in Y$ jsou **srovnatelné** v uspořádání $\preceq$, když $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.
Uspořádání je **úplné** (neboli **totální**), když každé dva prvky z Y jsou srovnatelné.

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.
- $Y \subseteq 2^U$ a $\preceq$ je inkluze na množině 2^U, tedy $x \preceq y$ právě když $x \subseteq y$. (Zde 2^U značí množinu všech podmnožin nějaké množinu U.) Není úplné.

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.
- $Y \subseteq 2^U$ a $\preceq$ je inkluze na množině 2^U, tedy $x \preceq y$ právě když $x \subseteq y$.
  (Zde 2^U značí množinu všech podmnožin nějaké množinu U.) Není úplné.
- **Uspořádání po složkách** na množině $Y = \mathbb{R}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_i \leq y_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.
  Není úplné: např. pro $m = 2$ jsou vektory $\mathbf{x} = (0, 1)$ a $\mathbf{y} = (1, 0)$ nesrovnatelné.

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.
- $Y \subseteq 2^U$ a $\preceq$ je inkluze na množině 2^U, tedy $x \preceq y$ právě když $x \subseteq y$. (Zde 2^U značí množinu všech podmnožin nějaké množinu U.) Není úplné.
- **Uspořádání po složkách** na množině $Y = \mathbb{R}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_i \leq y_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.
  Není úplné: např. pro $m = 2$ jsou vektory $\mathbf{x} = (0, 1)$ a $\mathbf{y} = (1, 0)$ nesrovnatelné.
- **Lexikografické ('slovníkové') uspořádání** na množině $Y = \mathbb{N}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když buď $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, nebo existuje k takové, že $x_k < y_k$ a pro všechna $i < k$ platí $x_i = y_i$.
  Je úplné.

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.
- $Y \subseteq 2^U$ a $\preceq$ je inkluze na množině 2^U, tedy $x \preceq y$ právě když $x \subseteq y$.
  (Zde 2^U značí množinu všech podmnožin nějaké množinu U.) Není úplné.
- **Uspořádání po složkách** na množině $Y = \mathbb{R}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_i \leq y_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.
  Není úplné: např. pro $m = 2$ jsou vektory $\mathbf{x} = (0, 1)$ a $\mathbf{y} = (1, 0)$ nesrovnatelné.
- **Lexikografické ('slovníkové') uspořádání** na množině $Y = \mathbb{N}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když buď $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, nebo existuje k takové, že $x_k < y_k$ a pro všechna $i < k$ platí $x_i = y_i$.
  Je úplné.

Příklady kvazi-uspořádání (ale ne uspořádání) na $Y = \mathbb{R}^m$:

- $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_m$

Příklady

Příklady uspořádání:

- $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání $\leq$ reálných čísel. Je úplné.
- $Y \subseteq 2^U$ a $\preceq$ je inkluze na množině 2^U, tedy $x \preceq y$ právě když $x \subseteq y$.
  (Zde 2^U značí množinu všech podmnožin nějaké množinu U.) Není úplné.
- **Uspořádání po složkách** na množině $Y = \mathbb{R}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_i \leq y_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.
  Není úplné: např. pro $m = 2$ jsou vektory $\mathbf{x} = (0, 1)$ a $\mathbf{y} = (1, 0)$ nesrovnatelné.
- **Lexikografické ('slovníkové') uspořádání** na množině $Y = \mathbb{N}^m$:
  $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když buď $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, nebo existuje k takové, že $x_k < y_k$ a pro všechna $i < k$ platí $x_i = y_i$.
  Je úplné.

Příklady kvazi-uspořádání (ale ne uspořádání) na $Y = \mathbb{R}^m$:

- $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $x_1 + \cdots + x_m \leq y_1 + \cdots + y_m$
- $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ právě když $\max\{x_1, \ldots, x_m\} \leq \max\{y_1, \ldots, y_m\}$

Nejmenší a minimální prvky částečně uspořádané množiny

Prvek $x \in Y$ se nazývá (vzhledem ke (kvasi-)uspořádání $\preceq$)

- **nejmenší prvek** množiny Y, jestliže pro všechna $y \in Y$ platí $x \preceq y$.

Nejmenší a minimální prvky částečně uspořádané množiny

Prvek $x \in Y$ se nazývá (vzhledem ke (kvasi-)uspořádání $\preceq$)

- **nejmenší prvek** množiny Y, jestliže pro všechna $y \in Y$ platí $x \preceq y$.
- **minimální prvek** množiny Y, jestliže pro všechna $y \in Y$ platí $y \preceq x \implies x \preceq y$.

Pro úplné (kvasi-)uspořádání oba pojmy splývají.

Maximální a největší prvek jsou definovány obdobně.

Optimalizační úloha vzhledem k uspořádané množině

Dány

- množina X přípustných řešení (obvykle je $X \subseteq \mathbb{R}^n$)
- množina hodnot Y s částečným uspořádáním $\preceq$
- účelová funkce $f\colon X \to Y$

Hledáme nejmenší (pokud existují) nebo aspoň minimální (vzhledem k uspořádání $\preceq$) prvky množiny $f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} \subseteq Y$.

Optimalizační úloha vzhledem k uspořádané množině

Dány

- množina X přípustných řešení (obvykle je $X \subseteq \mathbb{R}^n$)
- množina hodnot Y s částečným uspořádáním $\preceq$
- účelová funkce $f\colon X \to Y$

Hledáme nejmenší (pokud existují) nebo aspoň minimální (vzhledem k uspořádání $\preceq$) prvky množiny $f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} \subseteq Y$.

- Známý speciální případ: $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání na $\mathbb{R}$.

Optimalizační úloha vzhledem k uspořádané množině

Dány

- množina X přípustných řešení (obvykle je $X \subseteq \mathbb{R}^n$)
- množina hodnot Y s částečným uspořádáním $\preceq$
- účelová funkce $f\colon X \to Y$

Hledáme nejmenší (pokud existují) nebo aspoň minimální (vzhledem k uspořádání $\preceq$) prvky množiny $f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\} \subseteq Y$.

- Známý speciální případ: $Y = \mathbb{R}$ a $\preceq$ je přirozené uspořádání na $\mathbb{R}$.
- Když $Y = \mathbb{R}^m$, mluvíme o **více-kriteriální optimalizaci**: minimalizujeme m kritérií $f_1, \ldots, f_m\colon X \to \mathbb{R}$ (složky zobrazení $\mathbf{f}\colon X \to \mathbb{R}^m$). (též známo jako **multi-objective optimization, vector optimization, Pareto optimization, ...**).

Příklad: Kupujeme auto

Z této nabídky chceme vybrat levné auto s malou spotřebou:

		VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
cena	[tis. euro]	16	15	14	15
spotřeba	[l/100km]	7.2	7.0	7.5	8.2

Příklad: Kupujeme auto

Z této nabídky chceme vybrat levné auto s malou spotřebou:

		VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
cena	[tis. euro]	16	15	14	15
spotřeba	[l/100km]	7.2	7.0	7.5	8.2

Máme

- $X = \{\text{VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Toyota Corolla}\}$
- $Y = \mathbb{R}^2$
- zobrazení $\mathbf{f}$ je definováno tabulkou (f_1 je cena, f_2 je spotřeba)

Příklad: Kupujeme auto

Z této nabídky chceme vybrat levné auto s malou spotřebou:

		VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
cena	[tis. euro]	16	15	14	15
spotřeba	[l/100km]	7.2	7.0	7.5	8.2

Máme

- $X = \{\text{VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Toyota Corolla}\}$
- $Y = \mathbb{R}^2$
- zobrazení $\mathbf{f}$ je definováno tabulkou (f_1 je cena, f_2 je spotřeba)

Dvě smysluplná uspořádání $\preceq$:

- uspořádání po složkách: Množina $\mathbf{f}(X)$ nemá nejmenší prvek.
  Má minimální prvky $\mathbf{f}(\text{Opel Astra}) = (15, 7.0)$ a $\mathbf{f}(\text{Ford Focus}) = (14, 7.5)$.

Příklad: Kupujeme auto

Z této nabídky chceme vybrat levné auto s malou spotřebou:

		VW Golf	Opel Astra	Ford Focus	Toyota Corolla
cena	[tis. euro]	16	15	14	15
spotřeba	[l/100km]	7.2	7.0	7.5	8.2

Máme

- $X = \{\,\text{VW Golf, Opel Astra, Ford Focus, Toyota Corolla}\,\}$
- $Y = \mathbb{R}^2$
- zobrazení $\mathbf{f}$ je definováno tabulkou (f_1 je cena, f_2 je spotřeba)

Dvě smysluplná uspořádání $\preceq$:

- uspořádání po složkách: Množina $\mathbf{f}(X)$ nemá nejmenší prvek.
  Má minimální prvky $\mathbf{f}(\text{Opel Astra}) = (15, 7.0)$ a $\mathbf{f}(\text{Ford Focus}) = (14, 7.5)$.
- lexikografické uspořádání: Nejprve se rozhodujme dle ceny a pak dle spotřeby.
  Množina $\mathbf{f}(X)$ má nejmenší prvek $\mathbf{f}(\text{Ford Focus}) = (14, 7.5)$.

Příklad: Umístění heliportu

V okrese je m vesnic se souřadnicemi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$. Do jakého místa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ máme umístit heliport, aby byl 'ke všem vesnicím blízko'?

Příklad: Umístění heliportu

V okrese je m vesnic se souřadnicemi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$. Do jakého místa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ máme umístit heliport, aby byl 'ke všem vesnicím blízko'?

Máme $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^m$, a $f_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|$.

Příklad: Umístění heliportu

V okrese je m vesnic se souřadnicemi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$. Do jakého místa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ máme umístit heliport, aby byl 'ke všem vesnicím blízko'?

Máme $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^m$, a $f_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|$.
Možná (smysluplná) (kvasi-)uspořádání $\preceq$:

- Uspořádání po složkách: Množina minimálních prvků množiny $\mathbf{f}(\mathbb{R}^2)$ je konvexní obal bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Myšlanka důkazu: když $\mathbf{x}$ není v konv. obalu, můžeme jím pohnout tak, aby se vzdálenost ke každému z bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ zmenšila.

Příklad: Umístění heliportu

V okrese je m vesnic se souřadnicemi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$. Do jakého místa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ máme umístit heliport, aby byl ‘ke všem vesnicím blízko’?

Máme $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^m$, a $f_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|$.
Možná (smysluplná) (kvasi-)uspořádání $\preceq$:

- Uspořádání po složkách: Množina minimálních prvků množiny $\mathbf{f}(\mathbb{R}^2)$ je konvexní obal bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Myšlanka důkazu: když $\mathbf{x}$ není v konv. obalu, můžeme jím pohnout tak, aby se vzdálenost ke každému z bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ zmenšila.
- Kvazi-uspořádání $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \max\{y_1, \ldots, y_n\}$: Minimalizujeme vzdálenost heliportu od nejvzdálenější vesnice:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})$$

Příklad: Umístění heliportu

V okrese je m vesnic se souřadnicemi $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$. Do jakého místa $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ máme umístit heliport, aby byl 'ke všem vesnicím blízko'?

Máme $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}^m$, a $f_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{a}_i - \mathbf{x}\|$.
Možná (smysluplná) (kvasi-)uspořádání $\preceq$:

- Uspořádání po složkách: Množina minimálních prvků množiny $\mathbf{f}(\mathbb{R}^2)$ je konvexní obal bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Myšlanka důkazu: když $\mathbf{x}$ není v konv. obalu, můžeme jím pohnout tak, aby se vzdálenost ke každému z bodů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ zmenšila.
- Kvazi-uspořádání $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff \max\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \max\{y_1, \ldots, y_n\}$: Minimalizujeme vzdálenost heliportu od nejvzdálenější vesnice:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \max_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})$$

- Kvazi-uspořádání $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n$: Minimalizujeme součet vzdáleností vesnic k heliportu:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{m} f_i(\mathbf{x})$$

Příklad: Úloha nejmenších čtverců s regularizací

Pro dané $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ chceme najít $\mathbf{x}$ tak, aby účelové funkce

$$f_1(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|, \qquad f_2(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$$

byly zároveň malé.