Optimalizace

Celočíselné lineární programování

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Úloha celočíselného LP a její LP relaxace

Celočíselný lineární program (integer LP, ILP):

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \,\}$$

Nejčastěji **0-1 lineární program**

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \,\}$$

Věta

Úloha 0-1 lineárního programování je NP-těžká.

LP relaxace úlohy:

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n \,\} \quad \geq \quad \min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n \,\}$$

... protože pro každé $X \subseteq Y$ a $f\colon Y \to \mathbb{R}$ platí $\min_{x\in X} f(x) \geq \min_{x \in Y} f(x)$.

Latinské čtverce

Latinský čtverec o straně n je matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \{1, \ldots, n\}^{n \times n}$, která v každém řádku a každém sloupci má různá čísla.

1	3	4	2
3	4	2	1
2	1	3	4
4	2	1	3

Popis pomocí soustavy rovnic s binárními proměnnými:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_i x_{ijk} &= 1 && \forall j, k \\
\textstyle\sum_j x_{ijk} &= 1 && \forall i, k \\
\textstyle\sum_k x_{ijk} &= 1 && \forall i, j \\
x_{ijk} &\in \{0, 1\} && \forall i, j, k
\end{aligned}
$$

kde $x_{ijk} = 1$ znamená $a_{ij} = k$.

Úloha na **doplnění latinského čtverce**:

- Jsou dány: číslo n a některá z čísel a_{ij}.
- Rozhodni, zda existují zbývající čísla a_{ij} tak, aby $\mathbf{A}$ byla latinský čtverec.

Věta

Úloha na doplnění latinského čtverce je NP-úplná.

Přiřazovací úloha (Linear Assignment Problem)

- Jsou dána čísla c_{ij} pro $i, j = 1, \ldots, n$.
- Najdi permutaci π: $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, která minimalizuje $\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i)}$.

ILP formulace ($x_{ij} = 1$ znamená $\pi(i) = j$):

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \textstyle\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} & \\ \text{za podm.} \quad & \textstyle\sum_j x_{ij} = 1 & \forall i \\ & \textstyle\sum_i x_{ij} = 1 & \forall j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i, j \end{aligned}$$

LP relaxace nahradí omezení $x_{ij} \in \{0, 1\}$ omezeními $x_{ij} \geq 0$ ($\Rightarrow$ $x_{ij} \in [0, 1]$).

Věta (Birkhoff, von Neumann)

Původní úloha a relaxovaná úloha mají stejné optimální hodnoty.

Mezi optimálními řešeními relaxované úlohy je aspoň jedno celočíselné.

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí (neorientovaného) grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X.

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí

Je dán graf (V, E). Najdi vrcholové pokrytí s nejmenším počtem vrcholů.

$$
\begin{array}{rll}
\text{min} & \sum_{i \in V} x_i & \\
\text{za podm.} & x_i + x_j \geq 1 & \forall \{i, j\} \in E \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in V
\end{array}
$$

Věta

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí je NP-těžká.

LP relaxace

$$\begin{array}{rll} \min & \sum_{i \in V} x_i & \\ \text{za podm.} & x_i + x_j \geq 1 & \forall \{i,j\} \in E \\ & x_i \in [0,1] & \forall i \in V \end{array}$$

Označme

- x_i $(i \in V)$ opt. řešení relaxované úlohy
- $y = \sum_i x_i$ opt. hodnota relaxované úlohy
- $\bar{x}_i = \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ $(i \in V)$ zaokrouhlené řešení relaxované úlohy (je přípustné!) ($\lfloor x \rfloor$ značí největší celé číslo menší nebo rovno x)
- $\bar{y} = \sum_i \bar{x}_i$
- y^* opt. hodnota původní úlohy

Věta (2-aproximace úlohy na nejmenší pokrytí)

Pro každý graf (V, E) máme $\bar{y} \leq 2y^*$ a $y \geq \frac{1}{2}y^*$.

Důkaz: Pro každé $x \geq 0$ je $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq 2x$. Tedy $0 \leq y \leq y^* \leq \bar{y} \leq 2y$.

Největší nezávislá množina

Podmnožina $X \subseteq V$ vrcholů grafu (V, E) je **nezávislá**, jestliže žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Úloha na největší nezávislou množinu

Je dán graf (V, E). Najdi nezávislou množinu s největším počtem vrcholů.

$$
\begin{array}{rll}
\max & \sum_{i \in V} x_i & \\
\text{za podm.} & x_i + x_j \leq 1 & \forall \{i, j\} \in E \\
& x_i \in \{0, 1\} & \forall i \in V
\end{array}
$$

LP relaxace nahradí omezení $x_i \in \{0, 1\}$ omezeními $x_i \in [0, 1]$.

- Relaxovaná úloha má triviální přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2}$ $(i \in V)$ s hodnotou $\frac{1}{2}|V|$.
- Tedy optimální hodnota y LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$.
- Ovšem pro každý úplný graf je opt. hodnota původní úlohy $y^* = 1$.

Věta (neaproximovatelnost úlohy na největší nezávislou množinu)

Pro každé $\epsilon > 0$ je NP-těžké najít přípustné řešení $\bar{x}_i \in \{0, 1\}$ $(i \in V)$ splňující $\sum_i \bar{x}_i \geq y^* / \epsilon$.