

Optimalizace

11. Dualita v lineárním programování

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{lll} \sum_j a_{ij} x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij} y_j = c_j & \forall j \end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A})\mathbf{x}$.

Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věty o dualitě

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná \mathbf{x}, \mathbf{y} zřejmě platí $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{lll} \sum_j a_{ij} x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij} y_j = c_j & \forall j \end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T \mathbf{A}) \mathbf{x}$.

Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{Ax} \geq \mathbf{y}^T \mathbf{b}$.

Věta (o silné dualitě)

Primární úloha má optimální řešení, právě když duální úloha má optimální řešení.

Pokud \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou optimální řešení, pak $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.

Důkaz neuvádíme (je složitý).

Příklad na slabou dualitu

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9$$

$$5 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$5 = x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-1 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$2 = x_1 \geq 0$$

$$1 = x_2 \geq 0$$

$$0 = x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 2$$

$$0 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1 = y_3 \geq 0$$

$$1 = y_4 \geq 0$$

$$0 = 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$4 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$-1 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

Příklad na silnou dualitu + komplementaritu

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4$$

$$3 = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$2.4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$3 = x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-0.6 = -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$1.2 = x_1 \geq 0$$

$$0.6 = x_2 \geq 0$$

$$0 = x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2 = 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$5 = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$3 = 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

Dovolené možnosti řešitelnosti primární a duální úlohy

primár/duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	✗	✗
neomezená	✗	✗	✓
nepřípustná	✗	✓	✓

- Tvrzení v prvním sloupci a prvním řádku plynou ze silné duality
- Zbylá tvrzení plynou ze slabé duality

Věta o stínových cenách

Definuj funkci

$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké \mathbf{b} právě jedno optimální řešení \mathbf{y}^* .

Pak je funkce f na nějakém okolí bodu \mathbf{b} diferencovatelná a platí $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Věta o stínových cenách

Definuj funkci

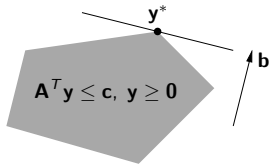
$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké \mathbf{b} právě jedno optimální řešení \mathbf{y}^* .

Pak je funkce f na nějakém okolí bodu \mathbf{b} diferencovatelná a platí $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Důkaz: Duál nabývá optima v jediném extrémálním bodě \mathbf{y}^* přípustného mnohostěnu duálu:



Změníme-li nepatrně \mathbf{b} , optimální duální řešení se nezmění a zůstane jediné.

Tedy na malém okolí bodu \mathbf{b} je $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ a $\nabla f(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^*$.

Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3, 1, 3, -1)^T (0.2, 0, 1.6, 0) = 5.4$$

Příklad

$$\min \quad 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.402$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3.01$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1$$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$\max \quad 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.402$$

$$0.2 = y_1 \geq 0$$

$$0 = y_2 \geq 0$$

$$1.6 = y_3 \geq 0$$

$$0 = y_4 \geq 0$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5$$

$$2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3.01, 1, 3, -1)^T (0.2, 0, 1.6, 0) = 5.402$$

Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

Dokažme, že tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

Dokažme, že tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Přepišme je jako

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Duální úloha pro LP v rovnicovém tvaru

Dokažme, že tyto dvě úlohy jsou navzájem duální:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

Přepišme je jako

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T (\mathbf{y}_+ - \mathbf{y}_-) \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

kde duální úloha jde dále přepsat jako

$$\begin{aligned} \max \quad & [\mathbf{b}^T - \mathbf{b}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{y}_+, \mathbf{y}_- \geq \mathbf{0} \\ & [\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{y}_+ \\ \mathbf{y}_- \end{bmatrix} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

O této dvojici víme, že je navzájem duální (viz první slide).

Duální úloha pro LP v obecném tvaru

\min	$\sum_{j \in J} c_j x_j$	\max	$\sum_{i \in I} y_i b_i$	
za podm.	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$	za podm.	$y_i \in \mathbb{R}$	$\forall i \in I_0$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i$		$y_i \geq 0$	$\forall i \in I_+$
	$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i$		$y_i \leq 0$	$\forall i \in I_-$
	$x_j \in \mathbb{R}$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j$	$\forall j \in J_0$
	$x_j \geq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j$	$\forall j \in J_+$
	$x_j \leq 0$		$\sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j$	$\forall j \in J_-$

kde

$$I = \{1, \dots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-$$

$$J = \{1, \dots, n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-$$

Příklad:

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 \quad - 3x_3 + x_4 \\ \text{za podm.} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 5 \\ & x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \\ & x_3 \geq 0 \\ & x_4 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \max & 6y_1 + 5y_2 \\ \text{za podm.} & y_1 \in \mathbb{R} \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \\ & 2y_1 - y_2 + y_3 \leq 2 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 = 0 \\ & y_1 - 3y_2 - y_3 \leq -3 \\ & 2y_1 \quad - 3y_3 \geq 1 \end{array}$$

Duální řešení jako certifikát optimality

Vektory \mathbf{x}, \mathbf{y} jsou optimální pro úlohy

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

právě tehdy, když splňují soustavu

$$\begin{array}{l} \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Tedy přípustné duální řešení \mathbf{y} splňující $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ je důkaz (**certifikát**) toho, že přípustné primární řešení \mathbf{x} je optimální.

Příklady na LP dualitu

Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i \end{array}$$

neboli

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & y \\ \text{za podm.} & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně $\min\{c_1, \dots, c_n\}$
- slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \dots, c_n\} \geq y$
- komplementarita: optimální \mathbf{x}, y splňují

$$(x_i = 0) \vee (y = c_i) \quad \forall i$$

Ekonomická interpretace duality

Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

$$\max \quad 120l + 76h$$

$$\text{za podm.} \quad 2l + 1.5h \leq 100$$

$$0.4l + 0.2h \leq 16$$

$$l \geq 0$$

$$h \geq 0$$

$$\min \quad 100a + 16b$$

$$\text{za podm.} \quad a \geq 0$$

$$b \geq 0$$

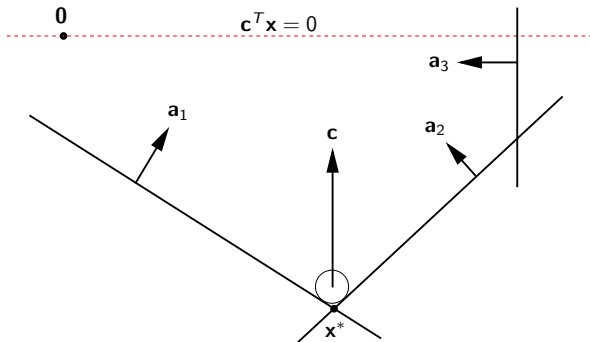
$$2a + 0.4b \geq 120$$

$$1.5a + 0.2b \geq 76$$

Význam duální úlohy:

- a, b jsou jednotkové ceny surovin (brambor a oleje)
- Překupník: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální duální řešení je $a = 32$ a $b = 140$ (stínové ceny surovin).

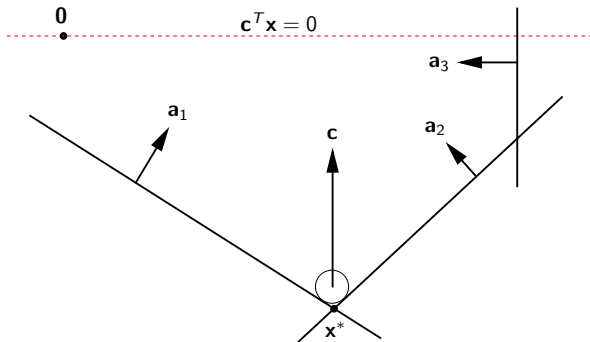
Míček v mnohostěnu



$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

- Míček v poloze \mathbf{x} je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ je minimální pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (primární optimum)

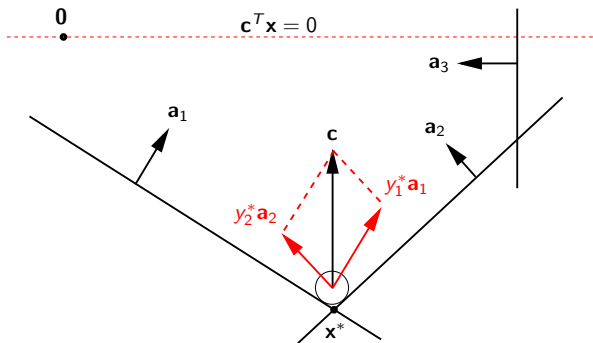
Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)

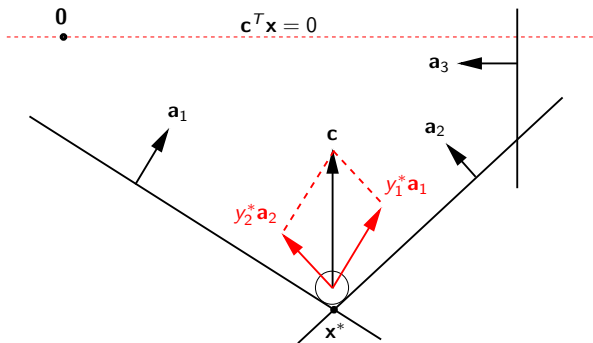
Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$

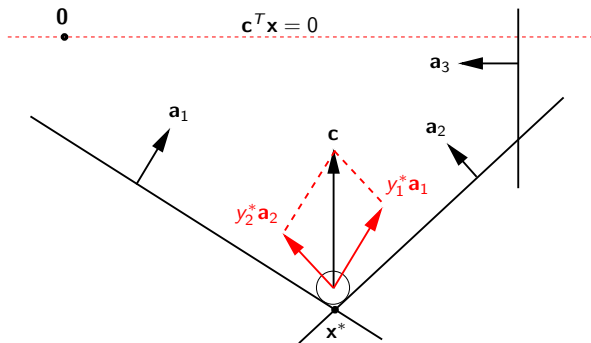
Míček v mnohostěnu



$$\min\{c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0\}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$

Míček v mnohostěnu



$$\min \{ c^T x \mid Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n \} = \max \{ b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0 \}$$

- Míček v poloze x je uvnitř mnohostěnu: $Ax \geq b$
- Potenciální energie $c^T x$ je minimální pro $x = x^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $c = \sum_i y_i^* a_i = A^T y^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$
- Když $a_i^T x^* > b_i$ (míček se stěny i nedotýká), síla stěny na míček je $y_i^* = 0$. Proto $y_i^* (a_i^T x^* - b_i) = 0$ (komplementarita).

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

\min	$\sum_{i=1}^n z_i$	\max	$\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)a_i$	
za podm.	$x + z_i \geq a_i$	za podm.	$p_i \geq 0$	$i = 1, \dots, n$
	$-x + z_i \geq -a_i$		$q_i \geq 0$	$i = 1, \dots, n$
	$z_i \in \mathbb{R}$		$p_i + q_i = 1$	$i = 1, \dots, n$
	$x \in \mathbb{R}$		$\sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0$	

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{za podm.} & x + z_i \geq a_i \\ & -x + z_i \geq -a_i \\ & z_i \in \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) a_i \\ \text{za podm.} & p_i \geq 0 \\ & q_i \geq 0 \\ & p_i + q_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0, -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{za podm.} & x + z_i \geq a_i \\ & -x + z_i \geq -a_i \\ & z_i \in \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)a_i \\ \text{za podm.} & p_i \geq 0 \\ & q_i \geq 0 \\ & p_i + q_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0, -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Pozorování: Optimální hodnoty se nezmění, posuneme-li body a_i o konstantu b .

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{za podm.} & x + z_i \geq a_i \\ & -x + z_i \geq -a_i \\ & z_i \in \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i)a_i \\ \text{za podm.} & p_i \geq 0 \\ & q_i \geq 0 \\ & p_i + q_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0, -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Pozorování: Optimální hodnoty se nezmění, posuneme-li body a_i o konstantu b .

Zvolíme tedy b tak, aby medián čísel a_i byl $x = 0$:

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{za podm.} & x + z_i \geq a_i \\ & -x + z_i \geq -a_i \\ & z_i \in \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) a_i \\ \text{za podm.} & p_i \geq 0 \\ & q_i \geq 0 \\ & p_i + q_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0, -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Pozorování: Optimální hodnoty se nezmění, posuneme-li body a_i o konstantu b .

Zvolíme tedy b tak, aby medián čísel a_i byl $x = 0$:

- Pak opt. hodnota primáru bude $\sum_{i=1}^n |x - a_i| = \sum_{i=1}^n |a_i|$

Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel a_1, \dots, a_n .

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n z_i \\ \text{za podm.} & x + z_i \geq a_i \\ & -x + z_i \geq -a_i \\ & z_i \in \mathbb{R} \\ & x \in \mathbb{R} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) a_i \\ \text{za podm.} & p_i \geq 0 \\ & q_i \geq 0 \\ & p_i + q_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \mid \sum_{i=1}^n t_i = 0, -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Pozorování: Optimální hodnoty se nezmění, posuneme-li body a_i o konstantu b .

Zvolíme tedy b tak, aby medián čísel a_i byl $x = 0$:

- Pak opt. hodnota primáru bude $\sum_{i=1}^n |x - a_i| = \sum_{i=1}^n |a_i|$
- Protože kladných a záporných a_i je stejný počet, duální optimum splňuje $t_i = -1$ pro $a_i < 0$ a $t_i = 1$ pro $a_i > 0$.

Tedy duální optimální hodnota je $\sum_{i=1}^n a_i t_i = \sum_{i=1}^n |a_i|$.