Optimalizace

6. Nelineární funkce a zobrazení

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Příklady funkcí $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $f(x, y) = x^3y^3 + x^2 - y^2 - 1$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
- skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Příklady funkcí $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $f(x, y) = x^3y^3 + x^2 - y^2 - 1$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x} + b$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$
- skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Definice

Graf funkce f je množina $\left\{ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\mathbf{x}) = y \right\}$.
Vrstevnice funkce f výšky y je množina $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(\mathbf{x}) = y \right\}$.

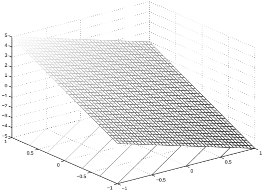
Příklady funkcí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $f(x, y) = x^3 y^3 + x^2 - y^2 - 1$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} + b$
- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c$
- skalární pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

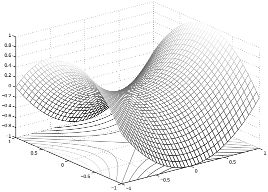
Definice

Graf funkce f je množina $\{ (\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ f(\mathbf{x}) = y \}$.
Vrstevnice funkce f výšky y je množina $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y \}$.

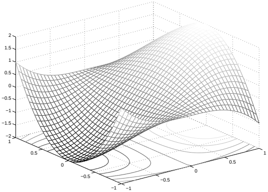
Příklady pro $n = 2$:



$f(x, y) = -2x + 3y$



$f(x, y) = x^2 - y^2$



$f(x, y) = 3x - x^3 - 3xy^2$

Příklady zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

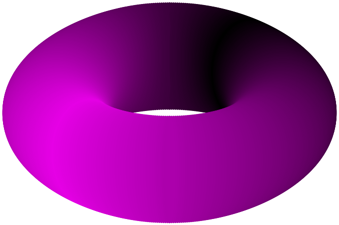
- $\mathbf{f}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$
- $\mathbf{f}(t) = (\,\cos t,\ \sin t\,)$
- $\mathbf{f}(t) = (\,\cos t,\ \sin t,\ t\,)$
- poloha částice jako funkce času

Příklady zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Příklady zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

- $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$
- vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\mathbf{f}(u, v) = \big((R + r\cos v)\cos u,\ (R + r\cos v)\sin u,\ r\sin v \big)$



Spojitost

Definice

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojité** v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

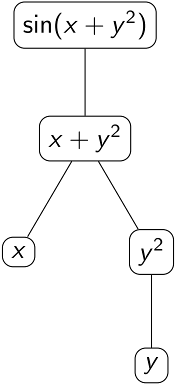
Spojitost

Definice

Zobrazení $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **spojité** v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Postačující podmínka: Spojitost se zachovává skládáním funkcí.



Derivace

Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **diferencovatelná** v bodě x, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{|y - x|} = 0.$$

Pak se a nazývá **derivace** funkce f v bodě x a píšeme $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = a$.

Tvrzení: Tato definice je ekvivalentní obvyklé definici derivace.

Intuice: Funkce f musí být v okolí bodu x podobná nějaké afinní funkci

$$g(y) = f(x) + a(y - x)$$

Derivace funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definice

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **diferencovatelná** v bodě x, jestliže existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že

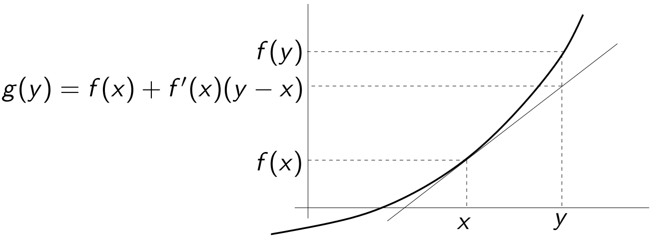
$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{|y - x|} = 0.$$

Pak se a nazývá **derivace** funkce f v bodě x a píšeme $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = a$.

Tvrzení: Tato definice je ekvivalentní obvyklé definici derivace.

Intuice: Funkce f musí být v okolí bodu x podobná nějaké afinní funkci

$$g(y) = f(x) + a(y - x)$$



Definice

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **diferencovatelné** v bodě $\mathbf{x}$, jestliže existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tak, že

$$\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|} = \mathbf{0}.$$

Pak se $\mathbf{A}$ nazývá **derivace** zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ a píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \mathbf{A}$.

Intuice: Zobrazení $\mathbf{f}$ musí být v okolí bodu $\mathbf{x}$ podobné afinnímu zobrazení

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})$$

Věta (Postačující podmínka pro diferencovatelnost)

Existují-li v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, pak je $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné.

Věta (Postačující podmínka pro diferencovatelnost)

Existují-li v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, pak je $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné.

Tvrzení

Je-li $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Věta (Postačující podmínka pro diferencovatelnost)

Existují-li v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, pak je $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné.

Tvrzení

Je-li $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Speciální případy:

- Pro $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $f'(x)$ skalár
- Pro $\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{f}'(x) = \begin{bmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{bmatrix}$ sloupcový vektor
- Pro $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ řádkový vektor

Derivace složeného zobrazení

Věta (Řetízkové pravidlo)

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{R}^l$$

platí

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = (\mathbf{g}' \circ \mathbf{f})(\mathbf{x})\, \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\, \mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

V Leibnizově značení: Je-li $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u})$ a $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, pak

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}\mathbf{u}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\mathbf{x}}$$

Přirozeně se zobecní pro složení více zobrazení.

Maticový kalkulus

Při počítání (totálních) derivací výrazů s vektory a maticemi
se snažíme považovat vektory a matice za **nedělitelné** objekty.

Příklad: Najděme derivaci kvadratické formy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i .$$

Tedy $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T = \mathbf{x}^T (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$.

Derivace zobrazení $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Derivace některých zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{I}$
$\mathbf{Ax}+\mathbf{b}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{Ag}(\mathbf{x})$	$\mathbf{Ag}'(\mathbf{x})$
$\mathbf{g}(\mathbf{Ax}+\mathbf{b})$	$\mathbf{g}'(\mathbf{Ax}+\mathbf{b})\mathbf{A}$

Derivace některých funkcí $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$f(\mathbf{x})$	$f'(\mathbf{x})$
$\mathbf{a}^T\mathbf{x}+b$	$\mathbf{a}^T$
$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \\|\mathbf{x}\\|^2$	$2\mathbf{x}^T$
$\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$	$\mathbf{x}^T(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)$
$\\|\mathbf{x}\\|$	$\mathbf{x}^T/\\|\mathbf{x}\\|$
$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\\|^2$	$2\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})$
$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{h}(\mathbf{x})$	$\mathbf{g}(\mathbf{x})^T\mathbf{h}'(\mathbf{x})+\mathbf{h}(\mathbf{x})^T\mathbf{g}'(\mathbf{x})$

Derivace zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$

Funkce $\mathbf{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}(x) & \cdots & f_{mn}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Derivaci této funkce v bodě $x \in \mathbb{R}$ je přirozené definovat jako matici

$$\mathbf{F}'(x) = \begin{bmatrix} f'_{11}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f'_{m1}(x) & \cdots & f'_{mn}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Pro $n = 1$ je to matice Jacobiho matice zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (sloupcový vektor).

Derivace funkce $\mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$

Derivaci funkce $f\colon \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$ v bodě

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11}(x) & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

je přirozené definovat jako matici

$$f'(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{11}} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{1n}} & \dots & \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Pro $n = 1$ je to Jacobiho matice zobrazení $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (tedy řádkový vektor).

$f(\mathbf{X})$	$f'(\mathbf{X})$	poznámka
$\operatorname{tr}\mathbf{X} = \langle \mathbf{I}, \mathbf{X} \rangle$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{X}$ čtvercová
$\operatorname{tr}(\mathbf{AX}) = \langle \mathbf{A}^T, \mathbf{X} \rangle$	$\mathbf{A}$	
$\\|\mathbf{X}\\|^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \operatorname{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$	$2\mathbf{X}^T$	
$\operatorname{tr}(\mathbf{X}^T\mathbf{AX}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{AX} \rangle$	$\mathbf{X}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$	
$\mathbf{a}^T\mathbf{X}\mathbf{b}$	$\mathbf{b}\mathbf{a}^T$	
$\operatorname{tr}(\mathbf{AXB})$	$\mathbf{BA}$	
$\operatorname{tr}(\mathbf{X}^k)$	$k\mathbf{X}^{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$
$\operatorname{tr}(\mathbf{X}^{-1})$	$-\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}^{-1} = -\mathbf{X}^{-2}$	$\mathbf{X}$ regulární
$\det\mathbf{X}$	$(\det\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X}$ regulární
$\ln\det\mathbf{X}$	$\mathbf{X}^{-1}$	$\mathbf{X}$ positivně definitní
$g(\mathbf{X}^T)$	$g'(\mathbf{X}^T)^T$	$g\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$

Směrová derivace

Řez zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení

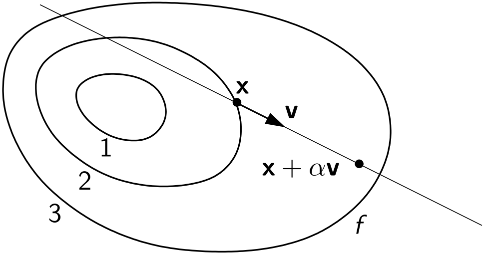
$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}).$$

Řez zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení

$$\boldsymbol{\varphi}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad \boldsymbol{\varphi}(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}).$$

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je vektor

$$\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}'_+(0) = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\boldsymbol{\varphi}(\alpha) - \boldsymbol{\varphi}(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha}$$



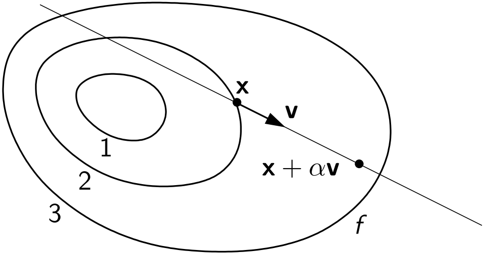
Směrová derivace

Řez zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je zobrazení

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}).$$

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je vektor

$$\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \varphi'_+(0) = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha}$$



Věta

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ (totálně) diferencovatelné, pak $\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Myšlenka důkazu: Zobrazení $\varphi(\alpha) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v})$ je složením zobrazení $\mathbf{f}$ a zobrazení $g(\alpha) = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}$. Věta pak plyne z řetízkového pravidla.

Gradient

Gradient funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je sloupcový vektor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

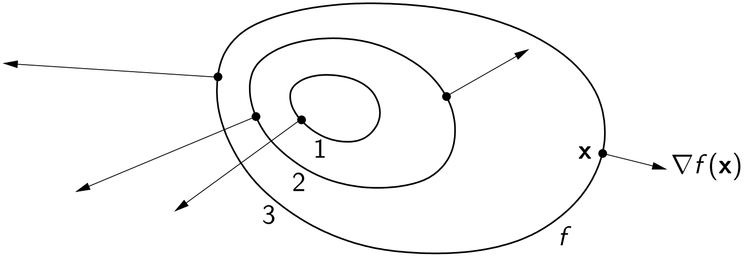
Gradient

Gradient funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je sloupcový vektor

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Směrová derivace $f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{v}$ je

- maximální ve směru $\dfrac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$
- nulová ve směru ortogonálním na $\nabla f(\mathbf{x})$



Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Shrnutí značení derivací

symbol	význam
$f'(x),\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \quad \in \mathbb{R}$	(oboustranná) derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in \mathbb{R}$
$f'_+(x), f'_-(x) \in \mathbb{R}$	derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě $x \in \mathbb{R}$ zprava/zleva
$f_{x_i}(\mathbf{x}),\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \in \mathbb{R}$	parciální derivace funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ podle x_i
$\mathbf{f}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \quad \in \mathbb{R}^m$	směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v}$
$\mathbf{f}'(\mathbf{x}),\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$	(totální) derivace (Jacobiho matice) zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\nabla f(\mathbf{x}) \quad \in \mathbb{R}^n$	gradient funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
$\mathbf{F}'(x),\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}(x)}{\mathrm{d}x} \quad \in \mathbb{R}^{m\times n}$	derivace zobrazení $\mathbf{F}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ v bodě $x \in \mathbb{R}$
$f'(\mathbf{X}),\ \frac{\mathrm{d}f(\mathbf{X})}{\mathrm{d}\mathbf{X}} \quad \in \mathbb{R}^{n\times m}$	derivace zobrazení $f\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
$f''(\mathbf{x}) \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$	druhá derivace (Hessova matice) funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

Taylorův polynom funkce

Definice

Taylorův polynom funkce $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně k v bodě $\mathbf{x}$ je polynom

$$T^k_{\mathbf{x}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

stupně k, který má v bodě $\mathbf{x}$ parciální derivace řádu $0, 1, \ldots, k$ stejné jako f.

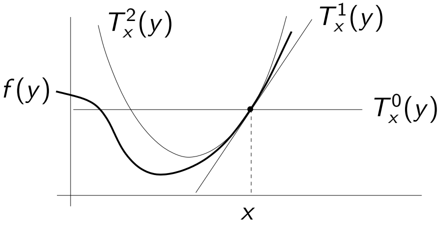
Taylorův polynom funkce

Definice

Taylorův polynom funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně k v bodě $\mathbf{x}$ je polynom

$$T^k_{\mathbf{x}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

stupně k, který má v bodě $\mathbf{x}$ parciální derivace řádu $0, 1, \ldots, k$ stejné jako f.



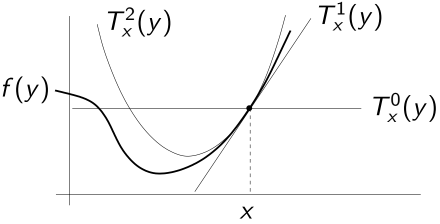
Taylorův polynom funkce

Definice

Taylorův polynom funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně k v bodě $\mathbf{x}$ je polynom

$$T^k_{\mathbf{x}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

stupně k, který má v bodě $\mathbf{x}$ parciální derivace řádu $0, 1, \ldots, k$ stejné jako f.



Taylorovy polynomy funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v bodě $\mathbf{x}$ do stupně dva:

$$T^0_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$
$$T^1_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$
$$T^2_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Lokální extrémy

Vnitřní a hraniční body podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

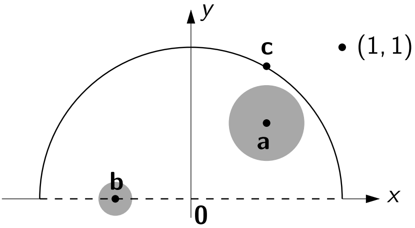
- **vnitřní bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$ pro nějaké $\epsilon > 0$,
- **hraniční bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ pro všechna $\epsilon > 0$ (nemusí patřit do množiny!).

Vnitřní a hraniční body podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- **vnitřní bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$ pro nějaké $\epsilon > 0$,
- **hraniční bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ pro všechna $\epsilon > 0$ (nemusí patřit do množiny!).

Příklad: $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0 \,\} \cup \{\, (1, 1) \,\}$

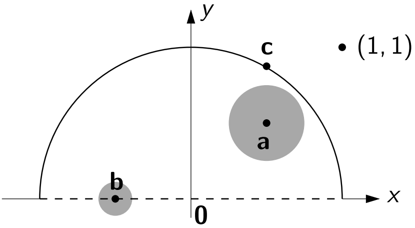


Vnitřní a hraniční body podmnožiny $\mathbb{R}^n$

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- **vnitřní bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$ pro nějaké $\epsilon > 0$,
- **hraniční bod**, pokud $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$ pro všechna $\epsilon > 0$ (nemusí patřit do množiny!).

Příklad: $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0 \,\} \cup \{\, (1, 1) \,\}$



Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je

- **otevřená**, jestliže každý její bod je vnitřní,
- **uzavřená**, jestliže obsahuje každý svůj hraniční bod.

Globální a lokální extrémy funkce na množině

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- **(globálního) minima**, jestliže $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,

Globální a lokální extrémy funkce na množině

Definice

Funkce $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- **(globálního) minima**, jestliže $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- **lokálního minima**, jestliže existuje $\epsilon > 0$ takové, že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ (globálního) minima na množině $X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

Globální a lokální extrémy funkce na množině

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- **(globálního) minima**, jestliže $f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- **lokálního minima**, jestliže existuje $\epsilon > 0$ takové,
  že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ (globálního) minima na množině $X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

(Globální, lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

- **volné**, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X
- **vázané**, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X

Globální a lokální extrémy funkce na množině

Definice

Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

- **(globálního) minima**, jestliže $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- **lokálního minima**, jestliže existuje $\epsilon > 0$ takové,
  že funkce f nabývá v bodě $\mathbf{x}$ (globálního) minima na množině $X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

(Globální, lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

- **volné**, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X
- **vázané**, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X

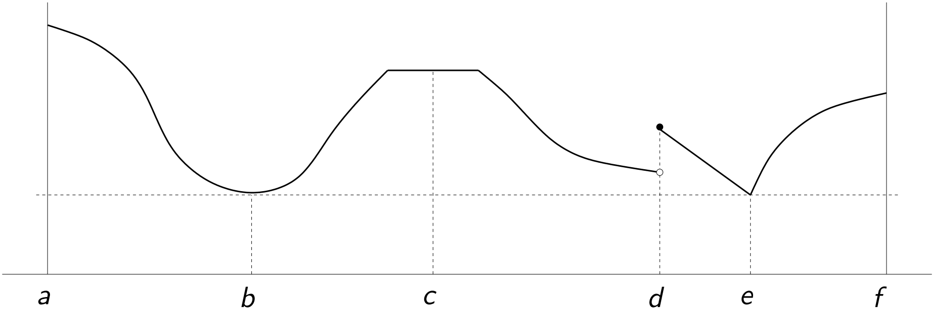
Tvrzení

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nechť $\mathbf{x}$ je vnitřní bod množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$.
Následující výroky jsou ekvivalentní:

- $\mathbf{x}$ je lokální minimum funkce f na množině X
- $\mathbf{x}$ je lokální minimum funkce f na množině $\mathbb{R}^n$.

Důkaz implikace $\Rightarrow$ je triviální.
Důkaz $\Leftarrow$: Nechť $\mathbf{x}$ je (gblobální) minimum f na $X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.
Protože $\mathbf{x}$ je vnitřní bod X, můžeme ϵ zmenšit tak, aby $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$.

Příklad: $n = 1$, $X = [a, f] \subseteq \mathbb{R}$



Příklad: $n = 2$, X je kružnice