Optimalizace

2. Vybraná témata z lineární algebry

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Maticová algebra

Matice

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová: $m = n$
- obdélníková: $m \neq n$
  - široká: $m < n$
  - úzká: $m > n$
- diagonální: $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$ (nemusí být čtvercová!)
- nulová $\mathbf{0}_{m \times n}$ (krátce jen $\mathbf{0}$): $a_{ij} = 0$ pro všechna i, j
- jednotková $\mathbf{I}_n$ (krátce jen $\mathbf{I}$): čtvercová diagonální s $a_{ii} = 1$ pro všechna i
- horní [dolní] trojúhelníková: $a_{ij} = 0$ pro $i > j$ [$i < j$] (nemusí být čtvercová!)

Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a skaláru $\alpha \in \mathbb{R}$ je matice $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$. Pro $\alpha = -1$ píšeme $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$.
- Součet matic $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Rozdíl matic: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
- Součin matic $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je matice $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

  Vlastnosti maticového součinu:

  - asociativní: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
  - distributivní se sčítáním: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
  - není komutativní (může být $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$)!

Transpozice

Transpozice matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- pozor: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$: matice $\mathbf{A}$ je **symetrická**
- $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$: matice $\mathbf{A}$ je **antisymetrická**

Inverze

Když matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak $\mathbf{A}$ je **levá inverze** matice $\mathbf{B}$ a $\mathbf{B}$ je **pravá inverze** matice $\mathbf{A}$.

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Tvrzení: Existuje-li pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné.
Důkaz: $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_m \implies \mathbf{B} = \mathbf{CAB} = \mathbf{C}$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí $\mathbf{A}^{-1}$.

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- matice má inverzi (= je **regulární**) $\iff$ má l.n. sloupce $\iff$ má l.n. řádky
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- pozor: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek $\mathbb{R}^{n\times 1}$).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek $\mathbb{R}^{1\times n}$).

Úmluva

Ztotožníme prostor $\mathbb{R}^n$ s prostorem $\mathbb{R}^{n\times 1}$:

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Příklady:

- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$
- Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1\times n}$
- Pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$ (standardní skalární součin)
- Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je $\mathbf{x}\mathbf{y}^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (vnější součin, dyáda)

Lineární podprostory a zobrazení

Lineární nezávislost

- **Lineární kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je vektor
$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$
pro nějaké $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.
- Vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže
$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$
Jinak jsou **lineárně závislé**

Tvrzení

Jsou-li vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ lineárně nezávislé, pak koeficienty $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou vektorem $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ určeny jednoznačně.

Důkaz: Nechť $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{x}_k$.
Z toho plyne odečtením $\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\mathbf{x}_k$.
Z definice lin. nezávislosti plyne $\alpha_i = \beta_i$.

Lineární podprostory

- **Lineární obal**

$$\operatorname{span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich lineárních kombinací.

- Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je **(lineární) podprostor** $\mathbb{R}^n$, jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z X patří do X).

- **Báze** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je lineárně nezávislá množina vektorů z X, jejichž lineární obal je X.

  Trvzení: Počet vektorů báze je stejný pro každou bázi.

- Počet vektorů báze je **dimenze** podprostoru, značíme $\dim X$.

- Je-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ báze podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \in X,$$

pak (jednoznačně určené) skaláry $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou **souřadnice** vektoru $\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Lineární zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **lineární**, jestliže

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.

Věta

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice $\mathbf{A}$ je zobrazením $\mathbf{f}$ určena jednoznačně.

Věta

Matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých zobrazení.

Důkaz plyne z asociativity maticového násobení: Pro $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}$ je

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Různé pohledy na součin Ax

- $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ po složkách:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

- Pomocí **sloupců** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

  Vektor $\mathbf{A}\mathbf{x}$ je lineární kombinace sloupců $\mathbf{A}$ s koeficienty x_i.

- Pomocí **řádků** $\mathbf{a}_1^T, \ldots, \mathbf{a}_m^T$ matice $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

  Složky vektoru $\mathbf{A}\mathbf{x}$ jsou skalární součiny řádků $\mathbf{A}$ a vektoru $\mathbf{x}$.

Prostor obrazů matice, hodnost

$$\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{ \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \quad \subseteq \mathbb{R}^m$$

Interpretace:

- Obor hodnot (range, image) lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ($\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$)
- Množina všech vektorů $\mathbf{y}$ takových, že soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ má řešení
- Lineární obal sloupců matice $\mathbf{A}$

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je dimenze lineárního obalu sloupců: $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \dim \operatorname{rng} \mathbf{A}$

Věta (rank factorization)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti r existují matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ a $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$.

Z toho se již dokáže:

Věta

$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}^T)$

Nulový prostor matice

$$\operatorname{null} \mathbf{A} = \{ \, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \, \} \quad \subseteq \mathbb{R}^n$$

Interpretace:

- Množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor
- Množina řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
- Množina všech vektorů kolmých na každý řádek matice $\mathbf{A}$

Věta (rank-nullity theorem)

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\underbrace{\dim \operatorname{rng} \mathbf{A}}_{\operatorname{rank} \mathbf{A}} + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n.$$

Myšlenka *důkazu*:
Nechť $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_r$ je báze $\operatorname{rng} \mathbf{A}$. Tedy existují $\mathbf{x}_i$ tak že $\mathbf{Ax}_i = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \ldots, r$.
Nechť $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q$ je báze $\operatorname{null} \mathbf{A}$.
Dokáže se, že $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q$ je báze prostoru $\mathbb{R}^n$. Tedy $r + q = n$.

- $\dim \operatorname{null} \mathbf{A}$ je míra degenerace lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$
- Počet lineárně nezávislých řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ je $n - \operatorname{rank} \mathbf{A}$

Charakterizace matic s lin. nezávislými řádky/sloupci

Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení pro každé $\mathbf{y}$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je surjektivní
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé řádky
- $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
- $\mathbf{AA}^T$ je regulární

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$
- zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ je injektivní
- $\mathbf{A}$ má lin. nezávislé sloupce
- $\mathbf{A}$ má levou inverzi
- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

Afinní podprostory a zobrazení

- **Afinní kombinace** vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k \qquad \text{kde } \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$$

- **Afinní obal**

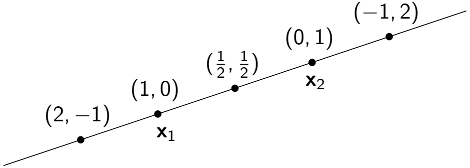
$$\operatorname{aff}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$$

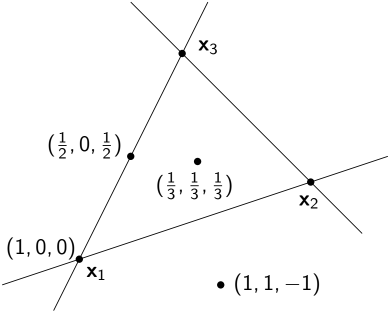
  vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich afinních kombinací.

- Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je **afinní podprostor**, jestliže je uzavřená na afinní kombinace.

Afinní kombinace nezávisí na počátku:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\mathbf{x}_0 \\ &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\end{aligned}$$



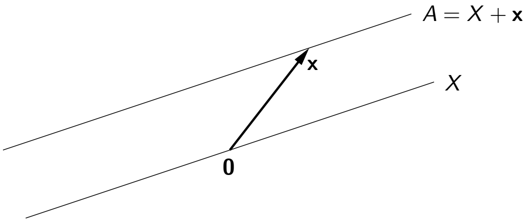


Charakterizace afinního podprostoru

Pro $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ označíme $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X \,\}$.

Věta

- Je-li X lineární podprostor a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak $X + \mathbf{x}$ je afinní podprostor.
- Je-li A afinní podprostor a $\mathbf{x} \in A$, pak $A - \mathbf{x}$ je lineární podprostor.
- Je-li A afinní podprostor a $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, pak $A - \mathbf{x} = A - \mathbf{y}$.



Dimenze neprázdného afinního podprostoru A je pak definována jako $\dim X$.

Věta

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je afinní podprostor právě tehdy, když je množinou řešení nějaké lineární soustavy, tj. $A = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \,\}$.

Názvy afinních podprostorů pro speciální dimenze:

- **bod** (dimenze 0) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- **přímka** (dimenze 1) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \mid \alpha \in \mathbb{R} \,\}$
- **rovina** (dimenze 2) $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,\}$
- **nadrovina** (dimenze $n-1$) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \,\}$

Afinní zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **afinní**, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Věta

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

pro nějaké $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ jsou zobrazením $\mathbf{f}$ určeny jednoznačně.

Analogie

Lineární svět	**Afinní svět**
lineární kombinace	afinní kombinace
lineární obal	afinní obal
lineární podprostor X	afinní podprostor $X + \mathbf{x}$
homogenní lin. soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$	nehomogenní lin. soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
$\operatorname{null} \mathbf{A}$	$\mathbf{x} + \operatorname{null} \mathbf{A}$
lineární zobrazení $\mathbf{Ax}$	afinní zobrazení $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$

Think geometrically, prove algebraically.
— John Tate

Ortogonalita

Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- **Standardní skalární součin:** $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru): $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$
- **Úhel** φ mezi vektory: $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$

  Jestliže $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$, vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou **ortogonální**, což značíme také $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ (nevylučuje možnost $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nebo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$).
- **Eukleidovská metrika** (vzdálenost bodů): $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

Ortonormální množina vektorů

- Vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ je **normalizovaný**, jestliže $\|\mathbf{u}\| = 1 = \mathbf{u}^T\mathbf{u}$.
- Množina vektorů $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ je **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Věta

Ortonormální množina vektorů je lineárně nezávislá.

Důkaz: Vynásob rovnost $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ skalárně vektorem $\mathbf{u}_i$.

Věta

Nechť jsou $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ ortonormální. Nechť

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

Pak $\alpha_i = \mathbf{u}_i^T\mathbf{x}$.

Důkaz: Vynásob rovnost $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n$ skalárně vektorem $\mathbf{u}_i$.

Matice s ortonormálními sloupci

Když vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří sloupce matice $\mathbf{U}$, pak

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \qquad \text{je totéž jako} \qquad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

Jestliže $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$, pak lineární zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$ zachovává skalární součin:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T (\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Tedy zobrazení $\mathbf{f}$ zachovává délky, úhly a vzdálenosti $\Rightarrow$ je to **isometrie**.

Ortogonální matice

Věta

Pro každou čtvercovou matici $\mathbf{U}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{U}$ má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ (tj. $\mathbf{U}$ má ortonormální řádky)
- $\mathbf{U}$ je regulární a splňuje $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Protože

$$\det(\mathbf{U}^T\mathbf{U}) = (\det \mathbf{U}^T)(\det \mathbf{U}) = (\det \mathbf{U})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

jsou dvě možnosti pro $\det \mathbf{U}$:

- $\det \mathbf{U} = 1$: isometrie $\mathbf{f}$ je **rotace**, matice $\mathbf{U}$ se nazývá **rotační** nebo **speciální ortogonální**
- $\det \mathbf{U} = -1$: isometrie $\mathbf{f}$ je složení rotace a zrcadlení

Příklady ortogonálních matic:

- **Rotační matice v $\mathbb{R}^2$**

  Rotace kolem počátku o úhel φ proti směru hodinových ručiček:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

- **Householderova matice** (elementární reflektor)

  Zrcadlení podle nadroviny procházející počátkem s normálou $\mathbf{u}$ kde $\|\mathbf{u}\| = 1$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

- **Permutační matice**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Její determinant je rovný znaménku permutace.

Jak parametrizovat rotace v $\mathbb{R}^n$? [nepovinné]

Maticová exponenciála: $\quad e^{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^0}{0!} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots$

- V Matlabu: `expm(A)`
- Je-li $\mathbf{A}$ diagonalizovatelná, pak $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})\mathbf{V}^{-1}$
  kde $\mathbf{A} = \mathbf{V}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\mathbf{V}^{-1}$ je spektrální rozklad matice $\mathbf{A}$ (kde obecně $\lambda_i \in \mathbb{C}$)

Věta

Matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je rotační,
právě když existuje antisymetrická matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (tj. $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$) tak, že $\mathbf{U} = e^{\mathbf{S}}$.

- Pro $n = 2$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$ je $e^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}$
- Pro $n = 3$ a $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$

  Tvrzení: Každá rotace v $\mathbb{R}^3$ kolem počátku je rotace kolem nějaké přímky procházející počátkem o nějaký úhel (axis-angle representation).
  Označíme-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, pak přímka má normálu $\mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$ a úhel je $\|\mathbf{s}\|$.

Zájemci, studujte *matrix exponential, Lie groups, Rodriguez rotation formula, ...*
Čtěte např. skripta Motl+Zahradník: Pěstujeme lineární algebru (MFF UK)!

Gram-Schmidtova ortonormalizace

Pro dané lin. nezávislé vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ najdi vektory $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ tak, že

- $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n$ jsou ortonormální,
- pro každé $k \le n$ platí $\operatorname{span}\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\} = \operatorname{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\}$.

Algoritmus:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}'_1 &= \mathbf{a}_1, & \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}'_1/\|\mathbf{q}'_1\| \\
\mathbf{q}'_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_2)\mathbf{q}_1, & \mathbf{q}_2 &= \mathbf{q}'_2/\|\mathbf{q}'_2\| \\
\mathbf{q}'_3 &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{q}_1^T\mathbf{a}_3)\mathbf{q}_1 - (\mathbf{q}_2^T\mathbf{a}_3)\mathbf{q}_2, & \mathbf{q}_3 &= \mathbf{q}'_3/\|\mathbf{q}'_3\| \\
&\dots
\end{aligned}
$$

QR rozklad matice

Věta (Plný QR rozklad)

Každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je ortogonální a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je horní trojúhelníková.

Důkaz: pomocí algoritmu. (Algoritmy na QR rozklad jsou založeny buď na Gram-Schmidtově ortogonalizaci nebo Givensových rotacích rotace nebo Householderových reflexích.)

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A)`

Redukovaný QR rozklad: $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonorm. sloupce a $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je horní trojúhelníková.

- V Matlabu: `[Q,R]=qr(A,0)`

Ortogonální doplněk podprostoru

- Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (značíme $\mathbf{y} \perp X$), jestliže $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.
- Podprostory $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou ortogonální (značíme $X \perp Y$), jestliže $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{y} \in Y$.
- **Ortogonální doplněk** podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je podprostor
$$X^\perp = \{\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \perp X \,\}$$
všech vektorů ortogonálních na X.

Věta

Pro každý podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:

- $\dim X + \dim X^\perp = n$
- $(X^\perp)^\perp = X$

Důkaz: Označíme-li $X = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$ (lin. obal řádků matice $\mathbf{A}$), pak $X^\perp = \operatorname{null} \mathbf{A}$ (všechny vektory kolmé na řádky $\mathbf{A}$). První tvrzení říká $\dim \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n$, což je rank-nullity theorem. Druhé tvrzení celkem snadno plyne z prvního.

Vztahy mezi čtyřmi základními podprostory matice

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definuje čtyři **základní podprostory**:

- $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \{\, \mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\} \subseteq \mathbb{R}^m$ lineární obal sloupců
- $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ všechny vektory kolmé na řádky
- $\operatorname{rng}(\mathbf{A}^T) = \{\, \mathbf{A}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lineární obal řádků
- $\operatorname{null}(\mathbf{A}^T) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \,\} \subseteq \mathbb{R}^m$ všechny vektory kolmé na sloupce

Věta

- $(\operatorname{rng} \mathbf{A})^\perp = \operatorname{null}(\mathbf{A}^T)$
- $(\operatorname{null} \mathbf{A})^\perp = \operatorname{rng}(\mathbf{A}^T)$

Důkaz plyne okamžitě z definic podprostorů a z rovnosti $(X^\perp)^\perp = X$.

Komplementární podprostory a (obecná) projekce

Podprostory $X, X' \subseteq \mathbb{R}^n$ nazveme **komplementární**, jestliže

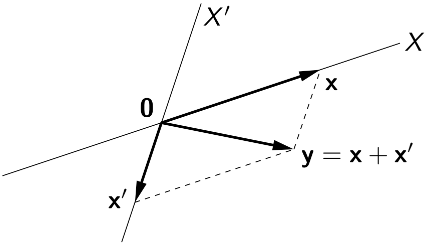
$$X \cap X' = \{\mathbf{0}\}$$

$$\dim X + \dim X' = n$$

Věta

Nechť $X, X' \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou komplementární podprostory. Pak pro každé $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna dvojice $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{x}' \in X'$ tak, že $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$.

Důkaz existence: Nechť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ je báze X a $\mathbf{x}_{m+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ je báze X'.
Dokážeme, že $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je báze $\mathbb{R}^n$. Tedy $\mathbf{y} = \underbrace{\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{x}_m}_{\mathbf{x} \in X} + \underbrace{\alpha_{m+1}\mathbf{x}_{m+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n}_{\mathbf{x}' \in X'}$.



Vektor $\mathbf{x}$ se nazývá **projekce** vektoru $\mathbf{y}$ na podprostor X ve směru podprostoru X'.

(Obecné) projektory

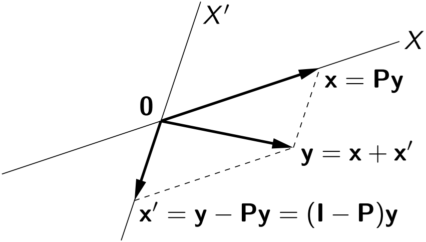
Definice: Matice $\mathbf{P}$ je **projektor**, jestliže $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

Věta

Podprostory $\operatorname{rng} \mathbf{P}$ a $\operatorname{null} \mathbf{P}$ jsou komplementární.
Obráceně, pro každou dvojici komplementárních podprostorů X, X' existuje právě jeden projektor $\mathbf{P}$ tak, že $X = \operatorname{rng} \mathbf{P}$ a $X' = \operatorname{null} \mathbf{P}$.

Důsledek: Vektor $\mathbf{x} = \mathbf{Py}$ je projekce vektoru $\mathbf{y}$ na $\operatorname{rng} \mathbf{P}$ ve směru $\operatorname{null} \mathbf{P}$.

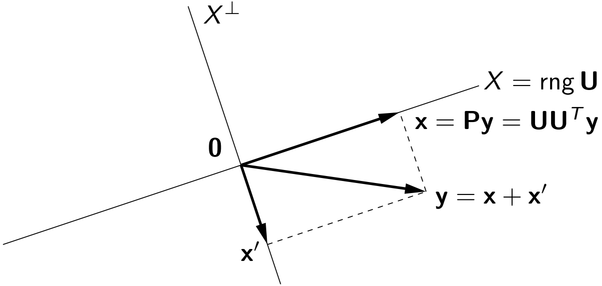
Důkaz: Z definice rng je $\mathbf{x} = \mathbf{Py} \in \operatorname{rng} \mathbf{P}$.
Ale také $\mathbf{x}' = \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{Py} \in \operatorname{null} \mathbf{P}$, neboť $\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{Py}) = \mathbf{Py} - \mathbf{P}^2\mathbf{y} = \mathbf{Py} - \mathbf{Py} = \mathbf{0}$.



Věta

Matice $\mathbf{P}$ je projektor, právě když $\mathbf{P} = \mathbf{BA}$ pro nějaké $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ splňující $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

Ortogonální projekce a projektory



Pozorování: Podprostory X a $X^\perp$ jsou komplementární.

- Tedy pro každé $\mathbf{y}$ jednoznačně existují $\mathbf{x} \in X$ a $\mathbf{x}' \in X^\perp$ tak, že $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{x}'$.
- Projekce na X ve směru $X^\perp$ se nazývá **ortogonální projekce** na X.

Věta (ort. projektor na podprostor zadaný ortonormální bází)

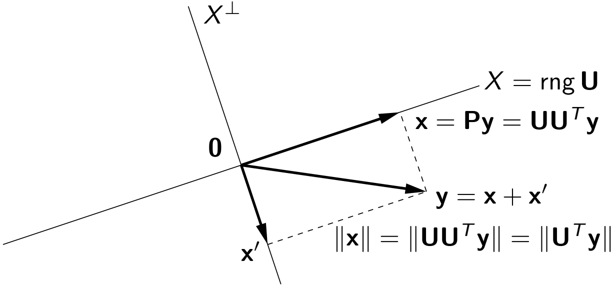
Nechť $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$. Ortogonální projektor na podprostor $\operatorname{rng} \mathbf{U}$ je $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$.

Důkaz: V předchozí Větě polož $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T$ a $\mathbf{B} = \mathbf{U}$.

Věta (charakterizace ort. projektorů)

Matice $\mathbf{P}$ je ortogonální projektor, právě když $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} = \mathbf{P}^T$.

Nejbližší bod k podprostoru



Hledáme bod $\mathbf{x}$ na podprostoru X, který je nejbližší danému bodu $\mathbf{y}$. Tedy řešíme

$$\min_{\mathbf{x} \in X} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

Věta (o kolmici)

Bod $\mathbf{x}$ je nejbližší bodu $\mathbf{y}$ na podprostoru X,
právě když $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \perp X$ (tedy $\mathbf{x}$ je ort. projekce $\mathbf{y}$ na X).

Délka ort. projekce $\mathbf{y}$ na X je vzdálenost bodu $\mathbf{y}$ od $X^\perp$:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{y}\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{y}\|$$

(neboť $\mathbf{U}$ má ortonormální sloupce a proto zachovává normu).

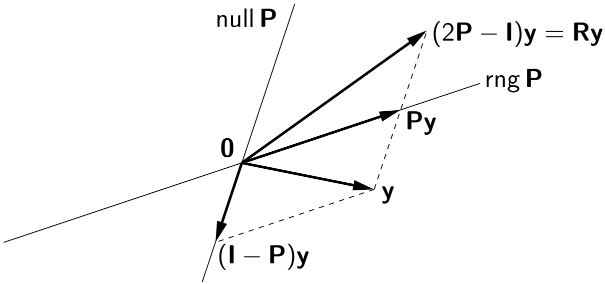
Zrcadlení a reflektory

Matice $\mathbf{R}$ je **reflektor**, jestliže $\mathbf{R}^2 = \mathbf{I}$.

Tvrzení

Je-li $\mathbf{P}$ projektor, pak $\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \mathbf{I}$ je reflektor.
Je-li $\mathbf{R}$ reflektor, pak $\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})/2$ je projektor.

Důkaz prvního tvrzení: $\mathbf{R}^2 = (2\mathbf{P} - \mathbf{I})^2 = 4\mathbf{P}^2 - 2\mathbf{P} - 2\mathbf{P} + \mathbf{I} = 4\mathbf{P} - 2\mathbf{P} - 2\mathbf{P} + \mathbf{I} = \mathbf{I}$.



Zobrazení $\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{y}$ je **zrcadlení** kolem $\operatorname{rng}\mathbf{P}$ ve směru $\operatorname{null}\mathbf{P}$.

Ortogonální reflektor splňuje navíc $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$.