Dynamické programování II cvičení

1.

7. Najděte nejdelší rostoucí podposloupnost dané posloupnosti. Použijte metodu dynamického programování, napište tabulku průběžných délek částečných výsledků a tabulku předchůdců.

a) **5 8 11 13 9 4 1 2 0 3 7 10 12 6**

b) **6 7 5 15 10 9 11 18 19 8 12 1 3 4 13 14 0 17 2 16**

2.

- Určete, jak lze využít nebo přizpůsobit metodu hledání nejdelší rostoucí podposloupnosti pro hledání

a) nejdelší klesající podposloupnosti,

b) nejdelší neklesající podposloupnosti,

c) nejdelší konstantní podposloupnosti,

d) nejdelší alternující posloupnosti.

(V alternující posloupnosti a[1], a[2], ... a[n] platí

(a[k] – a[k–1])* (a[k+1] – a[k]) < 0, pro k = 2, 3, ..., n–1.)

3.

- **1.** Kolika různými způsoby lze uzávorkovat součin matic?
- (Různé způsoby závorkování odpovídají různému průběhu výpočtu a obecně různým mezivýsledkům. Závorkování (X) a ((X)) pokládáme za totožné.)

a) $A \times B \times C \times D$

b) $A \times B \times C \times D \times E$

4.

Předpokládejme, že na vypočtení součinu matic $A \times B$ je zapotřebí $r \cdot s \cdot t$ operací, kde $A \in \mathbf{R}^{r \times s}$ a $B \in \mathbf{R}^{s \times t}$. Určete, kolik operací je třeba na výpočet součinu

$(A \times B) \times C$ a kolik na výpočet součinu $A \times (B \times C)$, pokud

a) $A \in \mathbf{R}^{n \times 2}$, $B \in \mathbf{R}^{2 \times 3}$, $C \in \mathbf{R}^{3 \times 4}$

b) $A \in \mathbf{R}^{5 \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times 4}$, $C \in \mathbf{R}^{4 \times n}$

c) $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times 100}$, $C \in \mathbf{R}^{100 \times n}$

5.

- Určete, pro které hodnoty n je výhodnější vypočítat součin $(A \times B) \times C$ než vypočítat součin $A \times (B \times C)$.

- a) $A \in \mathbf{R}^{n\times 2}$, $B \in \mathbf{R}^{2\times 3}$, $C \in \mathbf{R}^{3\times 4}$
- b) $A \in \mathbf{R}^{5\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times 4}$, $C \in \mathbf{R}^{4\times n}$
- c) $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times 100}$, $C \in \mathbf{R}^{100\times n}$

6.

- Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou po řadě 2×5, 5×3, 3×6, 6×2, 2×4.
- Určete metodou dynamického programování, jak uzávorkovat součin $A \times B \times C \times D \times E$, aby počet operací násobení dvou čísel během výpočtu celého součinu byl co nejmenší. Kolik to bude operací?

7.

- Rozměry matic A, B, C, D, E, jsou stejné jako v předchozí úloze. Z důvodů např. testování HW/SW si přejeme součin uzávorkovat tak, aby počet operací násobení dvou čísel byl co největší.
- Rozhodněte, zda lze metodu hledání co nejvýhodnějšího uzávorkování přizpůsobit pro řešení této modifikované úlohy. Jaký bude algoritmus řešení?

8.

- Použijte myšlenku výpočtu optimálního uzávorkování v součinu matic pro řešení jednodušší úlohy:
- Kolika různými způsoby lze uzávorkovat součin *n* matic? Budete potřebovat 2D nebo 1D tabulku? Ověřte výsledek pro několik malých hodnot *n*, měl by vyjít $\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n}$

9.

Optimální binární vyhledávací strom

a) minimalizuje hloubku stromu,
b) maximalizuje cenu uzlů,
c) maximalizuje počet listů,
d) minimalizuje dobu vyhledávání ve stromu,
e) minimalizuje délku cesty z kořene do libovolného listu.

10.

- Je dáno n klíčů. Společně s každým klíčem je dána také pravděpodobnost dotazu na tento klíč. Nalezení kořene optimálního BVS sestaveného z těchto klíčů má asymptotickou složitost

a) $O(\log(n))$

b) $\Theta(n)$

c) $O(n \cdot \log(n))$

d) $\Omega(n^2)$

e) $\Omega(2^n)$

11a.

- Pravděpodobnost dotazu na konkrétní klíče daného BVS je uvedena u jednotlivých uzlů. Dlouhodobě je průměrný počet navštívených uzlů při jednom dotazu na klíč ve stromu roven

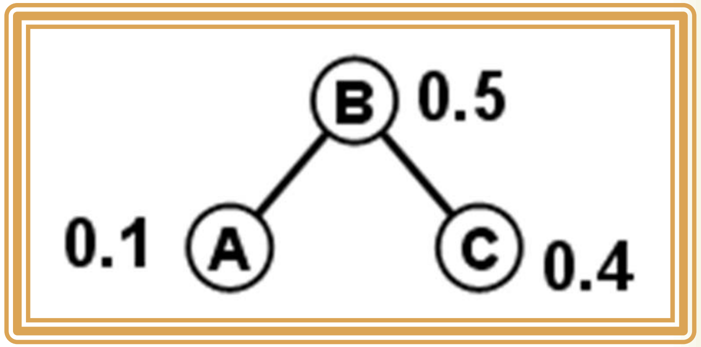
a) 0.5

b) 1.0

c) 1.25

d) 1.5

e) 1.75



11b.

Pravděpodobnost dotazu na konkrétní klíče daného BVS je uvedena u jednotlivých uzlů. Dlouhodobě je průměrný počet navštívených uzlů při jednom dotazu na klíč ve stromu roven

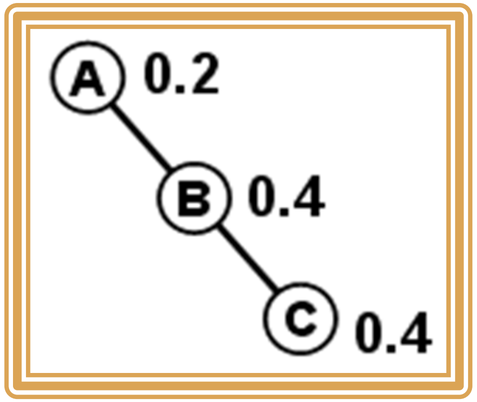
a) 0.2

b) 1.0

c) 2.15

d) 2.2

e) 2.5

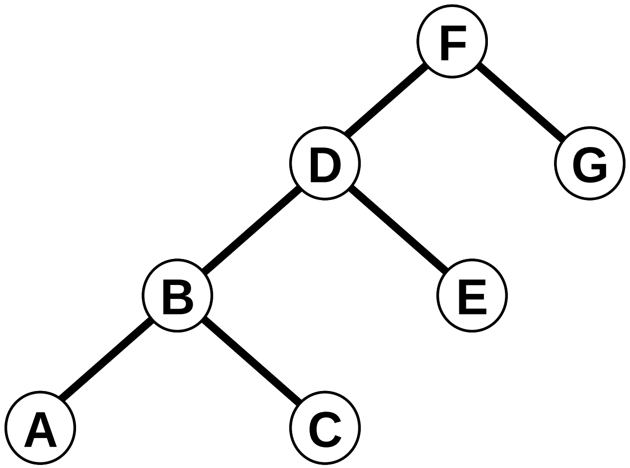


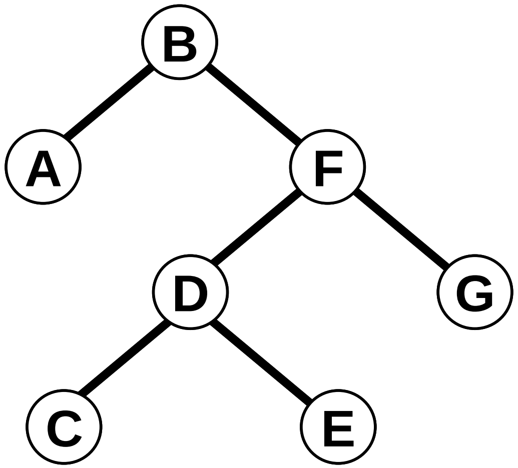
12.

- Pravděpodobnost dotazu na jednotlivé klíče v obou daných BVS je tato:

A: 0.10 B: 0.20 C: 0.25 D: 0.05 E: 0.10 F: 0.25 G: 0.05

- Vypočtěte, který strom je výhodnější pro operaci FIND.





13.

- Určete, jak bude vypadat optimální BVS, když jej vybudujeme pro 7 klíčů s frekvencemi:

a)

E 0.04 F 0.05 G 0.22 H 0.04 I 0.06 J 0.05 K 0.15

b)

A 0.10 B 0.10 C 0.25 D 0.35 E 0.10 F 0.05 G 0.05

14.

- V dané matici začneme kdekoli v prvním sloupci a dále vždy postupujeme jen ve směru SV, V, JV až kamkoli do posledního sloupce. Cena cesty je součet hodnot navštívených polí. Jaká může být nejmenší?

29	10	11	23	22	23
27	25	29	12	29	24
18	21	11	27	14	24
30	17	26	29	23	22
12	25	23	13	28	16
20	24	10	14	30	15

15.

- Maticí cestujeme podle stejných pravidel jako v předchozí úloze. Cena za cestu je součet absolutních hodnot rozdílů cen sousedních navštívených polí.

29	10	11	23	22	23
27	25	29	12	29	24
18	21	11	27	14	24
30	17	26	29	23	22
12	25	23	13	28	16
20	24	10	14	30	15

16.

- Dva dané řetězce mají oba délku n. Nejdelší společnou podposloupnost těchto řetězců lze nalézt pomocí dynamického programování v čase

a) $\Theta(\log(n))$
b) $\Theta(n)$
c) $\Theta(n \cdot \log(n))$
d) $\Theta(n^2)$
e) $\Theta(n^3)$

17.

- Najděte nejdelší společnou podposloupnost dvojice řetězců

a) A: 11101001000
   B: 00010010111 (B = A odzadu)

b) A: 110011001100 1100
   B: 1010101010101010

c) A: 110100100010000100000 1000001
   B: 001011011101111011111 0111110 (B = doplněk A)

18.

- Řešte neomezenou variantu úlohy batohu pro kapacitu 10 a čtyři předměty, jejichž váhy jsou postupně 1, 3, 4, 6 a ceny jsou ve stejném pořadí předmětů 11, 33, 45, 65.
- Jaká bude maximální cena předmětů v batohu?

19.

- Řešte 0/1 variantu úlohy batohu pro kapacitu 130 a pět předmětů, jejichž váhy jsou postupně 20, 30, 40, 50, 60 a ceny jsou ve stejném pořadí předmětů 11, 33, 45, 58, 65.
- Jaká bude maximální cena předmětů v batohu?
- Uvažte, jak se vyhnout tabulce se cca 130 sloupci a upravte postup řešení tak, aby stačilo řádově méně sloupců.

20.

- Každá zásilka ve skladu má určenou váhu a je nutno všechy zásilky naložit na dvě přistavené dodávky tak, aby se váhy nákladů na obou dodávkách lišily co nejméně.
- Zdůvodněte, zda lze či nelze metodu DP pro řešení úlohy batohu využít i v této situaci.

21.

- Kryštof staví malé sportovní lodě. Vyrábí jich několik typů a vždy se věnuje stavbě jen jedné lodě, dokud není hotová. Pro každý typ lodě zná počet dní potřebný ke stavbě lodě a zná svůj zisk z jejího prodeje. Ví, kolik dní bude letos v sezóně věnovat své práci.
- Navrhněte metodu dynamického programování, která bude maximalizovat Kryštofův výdělek za letošní sezónu.