ÚVOD DO TEORIE BAYESOVSKÝCH SÍTÍ

aneb

co bychom měli znát, chceme-li je používat

Radim Jiroušek

Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i.

radim@utia.cas.cz

Reprezentace znalostí

Příklad

Ředitelé jsou obvykle starší lidé

Věk ředitelů dle velikosti podniku

věk	ředitel podniku		
	malého do 20 zaměstnanců	středního do 150 zaměstnanců	velkého 150 + zaměstnanců
20 - 30	64	28	8
31 - 40	122	172	68
41 - 50	204	236	102
51 +	228	366	402

Pravděpodobnostní distribuce reprezentující znalost

Ředitelé jsou obvykle starší lidé

věk	ředitel podniku		
	malého do 20 zaměstnanců	středního do 150 zaměstnanců	velkého 150 + zaměstnanců
20 - 30	0.032	0.014	0.004
31 - 40	0.061	0.086	0.034
41 - 50	0.102	0.118	0.051
51 +	0.114	0.183	0.201

Pravidla reprezentující částečné znalosti:

- **IF** *podnik má více než 150 zaměstnanců* **THEN** *ředitel má více než 50 let* [69]

Pravidla reprezentující částečné znalosti:

- **IF** *podnik má více než 150 zaměstnanců* **THEN** *ředitel má více než 50 let* [69]
- **IF** *ředitel má méně než 50 let* **THEN** *podnik nemá více než 150 zaměstnanců* [84]

Pravidla reprezentující částečné znalosti:

- **IF** *podnik má více než 150 zaměstnanců* **THEN** *ředitel má více než 50 let* [69]
- **IF** *ředitel má méně než 50 let* **THEN** *podnik nemá více než 150 zaměstnanců* [84]
- **IF** *ředitel je mezi 30 a 40* **THEN** *podnik patří do střední třídy* [47]

Pravděpodobnostní distribuce reprezentující znalost

Závislost výskytu revmatických chorob a věku

věk	revmatická choroba	
	ano	ne
≤ 30	0.03	0.43
31 - 40	0.02	0.12
41 - 55	0.06	0.13
> 55	0.11	0.10

Pravděpodobnostní distribuce reprezentující znalost

Závislost výskytu revmatických chorob, pohlaví a věku

<table>
<tr><td rowspan="4">věk</td><td colspan="4">obezita</td></tr>
<tr><td colspan="2">ano</td><td colspan="2">ne</td></tr>
<tr><td colspan="4">revmatická choroba</td></tr>
<tr><td>ano</td><td>ne</td><td>ano</td><td>ne</td></tr>
<tr><td>$\leq$ 30</td><td>0.02</td><td>0.11</td><td>0.01</td><td>32</td></tr>
<tr><td>31 - 40</td><td>0.01</td><td>0.04</td><td>0.01</td><td>0.08</td></tr>
<tr><td>41 - 55</td><td>0.04</td><td>0.05</td><td>0.02</td><td>0.08</td></tr>
<tr><td>$>$ 55</td><td>0.06</td><td>0.03</td><td>0.05</td><td>0.07</td></tr>
</table>

Kolikarozměrné distribuce můžeme ukládat?

Kolikarozměrné distribuce můžeme ukládat?

S kolikarozměrnými distribucemi můžeme počítat?

Kolikarozměrné distribuce můžeme ukládat?

S kolikarozměrnými distribucemi můžeme počítat?

Reálné problémy vyžadují stovky veličin!

250-dimenzionální distribuce (tabulka) vyžaduje alespoň

2^{250} pravděpodobností

250-dimenzionální distribuce (tabulka) vyžaduje alespoň

2^{250} pravděpodobností

Promiňte,

250-dimenzionální distribuce (tabulka)
vyžaduje alespoň

$$2^{250} \text{ pravděpodobností}$$

Promiňte, pouze

$$(2^{250} - 1) \text{ pravděpodobností}$$

Zavedení bayesovské sítě na příkladu:
Večerní procházka

Zavedení bayesovské sítě na příkladu: Večerní procházka

Veličina W

3 hodnoty: Long walk (L)
Short walk (S)
No walk (N)

pravděpodobnostní distribuce

L	S	N
.10	.20	.70

Večerní procházka

Veličina R

3 hodnoty: Heavy rain (H)
Drizzling (D)
No rain (N)

Večerní procházka

Veličina R

3 hodnoty: Heavy rain (H)
Drizzling (D)
No rain (N)

pravděpodobnostní distribuce

	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Veličiny X, Y, Z

konečné množiny hodnot $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$

pravděpodobnostní distribuce $\pi(x, y, z)$

$$\sum_{(x,y,z) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Z}} \pi(x, y, z) = 1.$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Veličiny X, Y, Z

konečné množiny hodnot $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$

pravděpodobnostní distribuce $\pi(x, y, z)$

$$\sum_{(x,y,z)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\mathbf{Z}} \pi(x, y, z) = 1.$$

Marginální distribuce: $\pi(x), \pi(y, z), \ldots$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r, w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r, w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

$\pi(r)$
.05
.10
.85

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r,w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

$\pi(r)$
.05
.10
.85

$\pi(w)$	.10	.20	.70

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Podmíněná pravděpodobnostní distribuce $\pi(x|y)$

$$\pi(x|y)\pi(y) = \pi(x,y)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Podmíněná pravděpodobnostní distribuce $\pi(x|y)$

$$\pi(x|y)\pi(y) = \pi(x, y)$$

Nezávislost

$$X \perp\!\!\!\perp Y[\pi] \iff \pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(x, y).$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Podmíněná pravděpodobnostní distribuce $\pi(x|y)$

$$\pi(x|y)\pi(y) = \pi(x,y)$$

Nezávislost

$$X \perp\!\!\!\perp Y[\pi] \iff \pi(x)\cdot\pi(y) = \pi(x,y).$$

Tvrzení:

$$X \perp\!\!\!\perp Y[\pi] \iff \pi(x|y) = \pi(x)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r,w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r, w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

$\pi(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r,w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

$\pi(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

$\pi(r\|w)$	L	S	N
H	.00	.00	.07
D	.00	.25	.07
N	1	.75	.84

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti I

Příklad:

$\pi(r, w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	.60

$\pi(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

$\pi(r \mid w)$	L	S	N
H	.00	.00	.07
D	.00	.25	.07
N	1	.75	.84

Večerní procházka

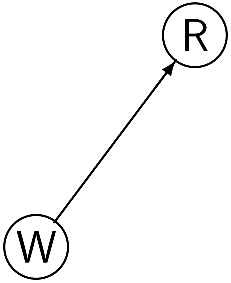
$\pi_1(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

$\pi_2(r\|w)$	L	S	N
H	.00	.00	.07
D	.00	.25	.07
N	1	.75	.84

Večerní procházka

$\pi_1(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

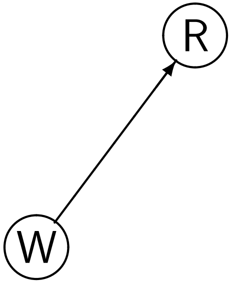
$\pi_2(r\|w)$	L	S	N
H	.00	.00	.07
D	.00	.25	.07
N	1	.75	.84



Večerní procházka

$\pi_1(w)$	L	S	N
	.10	.20	.70

$\pi_2(r\|w)$	L	S	N
H	.00	.00	.07
D	.00	.25	.07
N	1	.75	.84



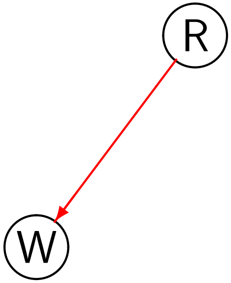
Bayesovská síť se 2 uzly - veličinami

$$\kappa(r,w) = \pi_2(r|w)\pi_1(w)$$

Večerní procházka

$\pi_1(r)$	H	D	N
	.05	.10	.85

$\pi_2(w\|r)$	L	S	N
H	.00	.00	1
D	.00	.50	.50
N	.12	.18	.70



Bayesovská síť se 2 uzly - veličinami

$$\kappa(r, w) = \pi_2(w|r)\pi_1(r)$$

Večerní procházka

$\pi(r,w)$	L	S	N
H	.00	.00	.05
D	.00	.05	.05
N	.10	.15	

Bayesovská síť

$\pi_1(r)$	H	D	N
	.05	.10	

$\pi_2(w\|r)$	L	S	N
H	.00	.00	
D	.00	.50	
N	.12	.18	

Večerní procházka

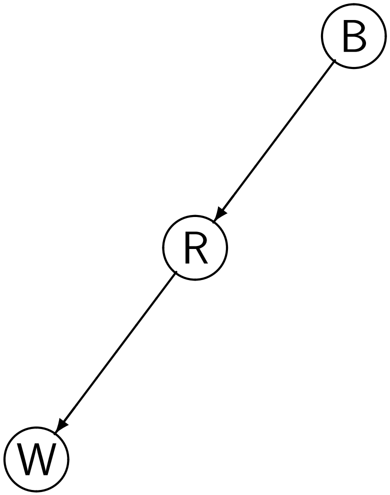
Veličina B

3 hodnoty: Rain (R)
Changeable (C)
Sunny (S)

pravděpodobnostní distribuce

R	C	S
.xx	.xx	.xx

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

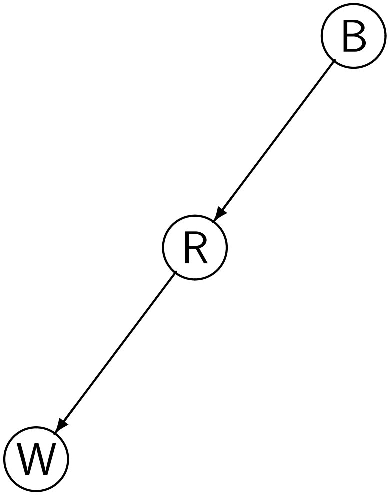
$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|r)$

Bayesovská síť se 3 uzly - veličinami

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|r)$

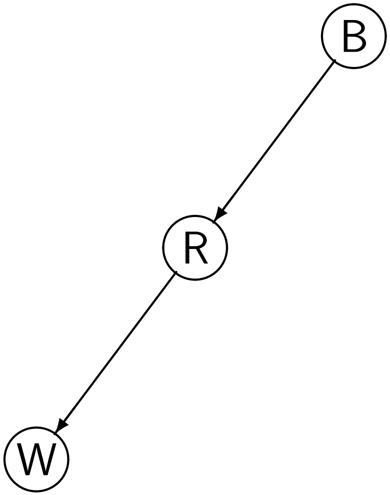
Bayesovská síť se 3 uzly - veličinami

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

Paměťové nároky:

$3 \times 3 \times 3 - 1 = 26$

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|r)$

Bayesovská síť se 3 uzly - veličinami

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

Paměťové nároky:

$3 \times 3 \times 3 - 1 = 26$ $\qquad$ $2 + 6 + 6 = 14$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Podmíněná nezávislost pro distribuci $\pi(x, y, z)$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z[\pi] \iff \pi(x, y, z) \cdot \pi(z) = \pi(x, z) \cdot \pi(y, z)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Podmíněná nezávislost pro distribuci $\pi(x, y, z)$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi] \iff \pi(x, y, z) \cdot \pi(z) = \pi(x, z) \cdot \pi(y, z)$$

Pro striktně pozitivní distribuce

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi] \iff \pi(x, y|z) = \pi(x|z) \cdot \pi(y|z)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Podmíněná nezávislost pro distribuci $\pi(x, y, z)$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi] \iff \pi(x, y, z) \cdot \pi(z) = \pi(x, z) \cdot \pi(y, z)$$

Pro striktně pozitivní distribuce

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi] \iff \pi(x, y|z) = \pi(x|z) \cdot \pi(y|z)$$

Tvrzení:

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi] \iff \pi(x|y, z) = \pi(x|z)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad "příprava na zkoušku"

X - čas strávený přípravou na zkoušku

Y - výsledek zkoušky (známka)

Z - počet bodů z testu

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi]$$

neboť $\pi(y|x, z) = \pi(y|z)$.

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad “večerní procházka”

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad "večerní procházka"

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

$\kappa(b, r) = \kappa(b)\kappa(r|b)$

$\kappa(b, r, w) = \kappa(b, r)\kappa(w|b, r)$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad “večerní procházka”

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

$\kappa(b, r) = \kappa(b)\kappa(r|b)$

$\kappa(b, r, w) = \kappa(b, r)\kappa(w|b, r) = \kappa(b)\kappa(r|b)\kappa(w|r, b)$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad "večerní procházka"

$$\kappa(b, r, w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

$\kappa(b, r) = \kappa(b)\kappa(r|b)$

$\kappa(b, r, w) = \kappa(b, r)\kappa(w|b, r) = \kappa(b)\kappa(r|b)\kappa(w|r, b)$

$\kappa(w|r, b) = \pi_3(w|r) = \kappa(w|r) \quad \Longrightarrow \quad W \perp\!\!\!\perp B|R[\kappa]$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad "večerní procházka"

$$\kappa(b,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|r)$$

$\kappa(b,r) = \kappa(b)\kappa(r|b)$

$\kappa(b,r,w) = \kappa(b,r)\kappa(w|b,r) = \kappa(b)\kappa(r|b)\kappa(w|r,b)$

$\kappa(w|r,b) = \pi_3(w|r) = \kappa(w|r) \implies W \perp\!\!\!\perp B|R[\kappa]$

Paměťové nároky:

$3 \times 3 \times 3 - 1 = 26$ $\qquad$ $2 + 6 + 6 = 14$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

vlastnosti podmíněné nezávislosti

Mohou nastat situace:

(i) $W \perp\!\!\!\perp B | R[\kappa]$ & $W \not\perp\!\!\!\perp B[\kappa]$,

(ii) $X \not\perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi]$ & $X \not\perp\!\!\!\perp Y[\pi]$,

(iii) $X \perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi]$ & $X \perp\!\!\!\perp Y[\pi]$,

(iv) $X \not\perp\!\!\!\perp Y | Z[\pi]$ & $X \perp\!\!\!\perp Y[\pi]$.

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

Příklad "sousedova procházka"

X - televizní program

Y - počasí

Z - sousedova procházka

$$X \perp\!\!\!\perp Y$$

ale
$$X \not\perp\!\!\!\perp Y | Z.$$

Minikurz (disktrétní) teorie pravděpodobnosti II

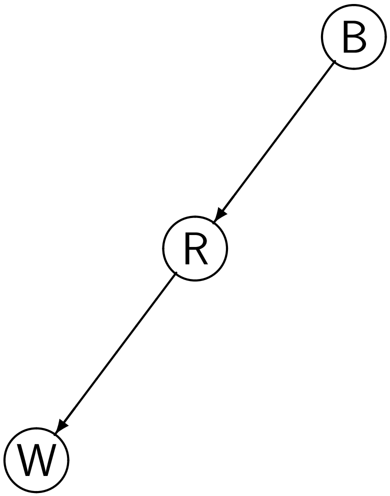
vlastnosti podmíněné nezávislosti

(Ne)závislostní struktura:

Nezávislostní struktura pravděpodobnostní distribuce $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je jednoznačně určena všemi trojicemi $(X_i, X_j, \{X_\ell\}_{\ell \in M})$, pro které platí

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | \{X_\ell\}_{\ell \in M} [\pi]$$

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|r)$

Nezávislostní struktura pravděpodobnostní distribuce:

$$\begin{array}{ll} B \perp\!\!\!\perp W | R[\kappa] & B \not\perp\!\!\!\perp W \\ B \not\perp\!\!\!\perp R|W[\kappa] & B \not\perp\!\!\!\perp R \\ R \not\perp\!\!\!\perp W|B[\kappa] & R \not\perp\!\!\!\perp W \end{array}$$

Večerní procházka

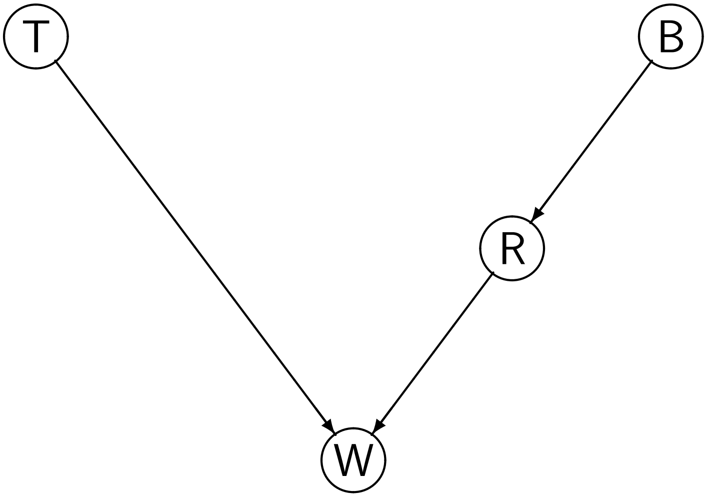
Veličina T

2 hodnoty: Interesting (I)
Uninteresting (U)

pravděpodobnostní distribuce

I	U
.xx	.xx

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|t,r)$

$\pi_4(t)$

Graf bayesovské sítě se 4 uzly - veličinami

$$\kappa(t,b,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|t,r)\pi_4(t)$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 - 1 = 53$$

$$1 + 2 + 6 + 12 = 21$$

Večerní procházka

Jaká je nezávislostní struktura distribuce

$$\kappa(t,b,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|t,r)\pi_4(t)$$

Večerní procházka

Jaká je nezávislostní struktura distribuce

$$\kappa(t,b,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|t,r)\pi_4(t)$$

$$T \perp\!\!\!\perp B[\kappa] \qquad T \perp\!\!\!\perp R|B[\kappa] \qquad B \perp\!\!\!\perp W|T,R[\kappa]$$

$$T \perp\!\!\!\perp R[\kappa] \qquad B \perp\!\!\!\perp T|R[\kappa] \qquad B \perp\!\!\!\perp W|R[\kappa]$$

Nezávislostní struktura snižující počet parametrů z 53 na 21

Večerní procházka

Veličina G

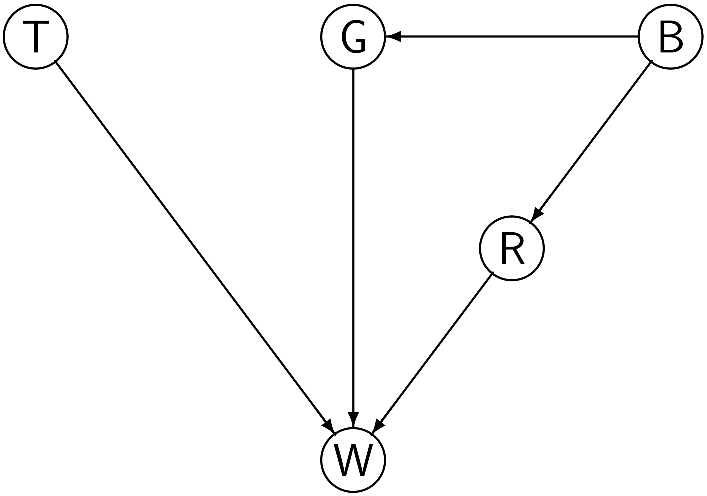
2 hodnoty: Yes (Y)

No (N)

pravděpodobnostní distribuce

Y	N
.xx	.xx

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|t,g,r)$

$\pi_4(g|b)$

$\pi_5(t)$

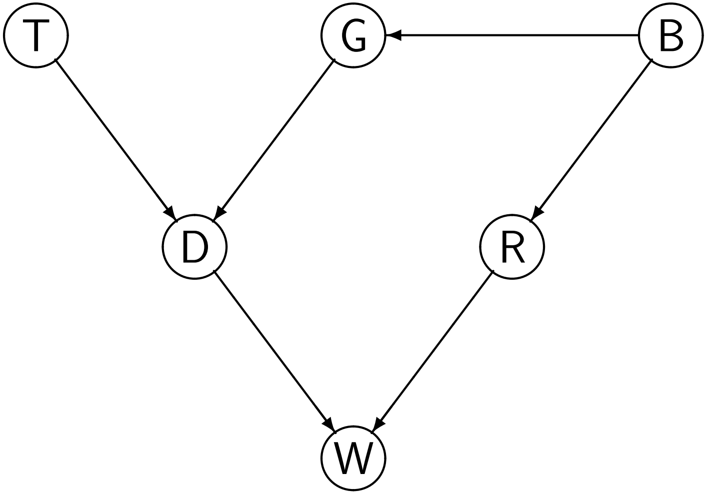
Graf bayesovské sítě s 5 uzly - veličinami

$$\kappa(t,g,b,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|t,g,r)\pi_4(g|b)\pi_5(t)$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 - 1 = 107$$

$$2 + 6 + 24 + 1 + 3 = 36$$

Večerní procházka



Večerní procházka

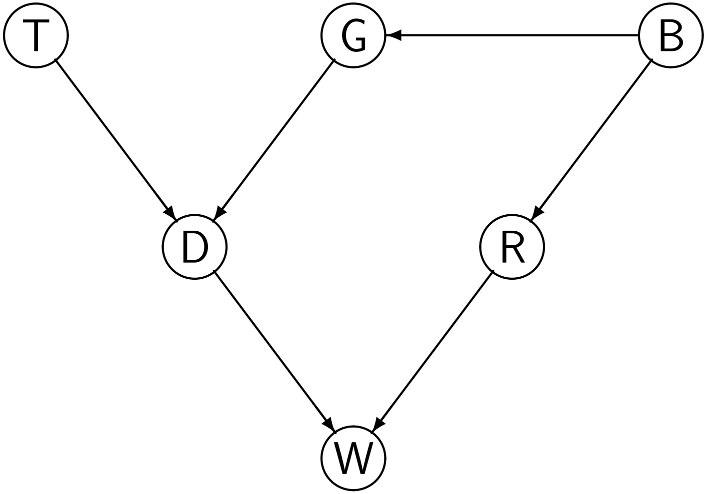
Pomocná veličina D

2 hodnoty: Yes (Y)
No (N)

pravděpodobnostní distribuce

Y	N
.xx	.xx

Večerní procházka



$\pi_1(b)$

$\pi_2(r|b)$

$\pi_3(w|d,r)$

$\pi_4(g|b)$

$\pi_5(t)$

$\pi_6(d|t,g)$

Graf bayesovské sítě se 6 uzly - veličinami

$$\kappa(t,g,b,d,r,w) = \pi_1(b)\pi_2(r|b)\pi_3(w|d,r)\pi_4(g|b)\pi_5(t)\pi_6(d|t,g)$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 - 1 = 215$$

$$2 + 6 + 12 + 3 + 1 + 4 = 28$$

Definice bayesovské sítě

Bayesovská síť je uspořádaná dvojice

1. Acyklický orientovaný graf, jehož uzlům jsou jednoznačně přiřazeny veličiny

$$G = (V, E)$$

Uvažujeme tedy veličiny $\{X_i\}_{i \in V}$

Definice bayesovské sítě

Bayesovská síť je uspořádaná dvojice

1. Acyklický orientovaný graf, jehož uzlům jsou jednoznačně přiřazeny veličiny

$$G = (V, E)$$

Uvažujeme tedy veličiny $\{X_i\}_{i \in V}$

2. Systém podmíněných pravděpodobnostních distribucí

$$\{\pi_i(x_i | (x_\ell)_{\ell \in pa(i)})\}_{i \in V}.$$

Definice bayesovské sítě

Bayesovská síť je uspořádaná dvojice

1. Acyklický orientovaný graf, jehož uzlům jsou jednoznačně přiřazeny veličiny

$$G = (V, E)$$

Uvažujeme tedy veličiny $\{X_i\}_{i \in V}$

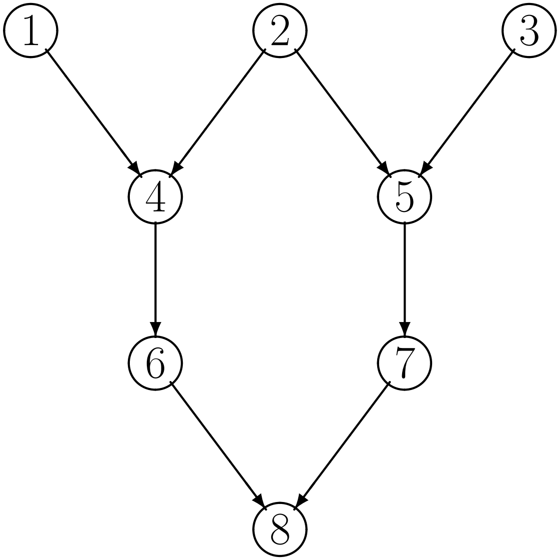
2. Systém podmíněných pravděpodobnostních distribucí

$$\{\pi_i(x_i|(x_\ell)_{\ell \in pa(i)})\}_{i \in V}.$$

Tato bayesovská síť reprezentuje pravděpodobnostní distribuci

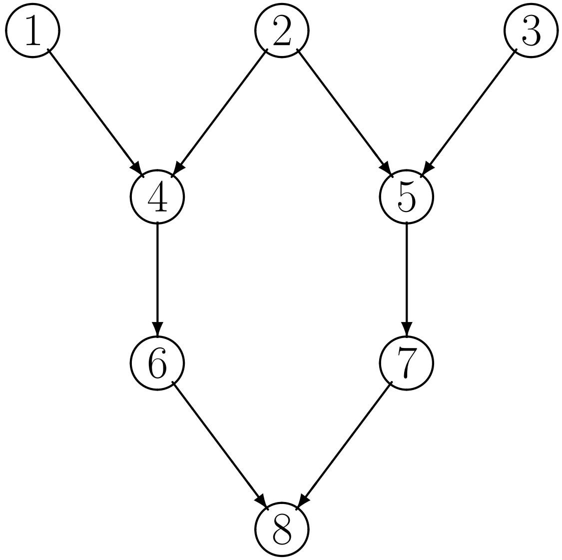
$$\kappa((x_\ell)_{\ell \in pa(i)}) = \prod_{i \in V} \pi_i(x_i|(x_\ell)_{\ell \in pa(i)}).$$

Bayesovská síť



Graf bayesovské sítě s 8 veličinami

Bayesovská síť



$\pi_1(x_1)$

$\pi_2(x_2)$

$\pi_3(x_3)$

$\pi_4(x_4|x_1, x_2)$

$\pi_5(x_5|x_2, x_3)$

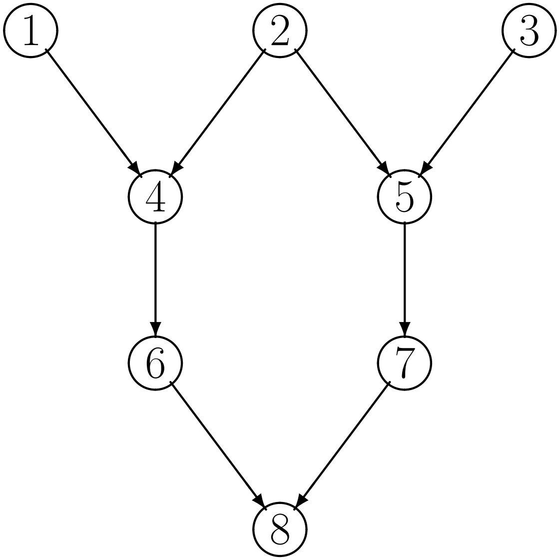
$\pi_6(x_6|x_4)$

$\pi_7(x_7|x_5)$

$\pi_8(x_8|x_6, x_7)$

Graf bayesovské sítě s 8 veličinami

Bayesovská síť



$\pi_1(x_1)$

$\pi_2(x_2)$

$\pi_3(x_3)$

$\pi_4(x_4|x_1, x_2)$

$\pi_5(x_5|x_2, x_3)$

$\pi_6(x_6|x_4)$

$\pi_7(x_7|x_5)$

$\pi_8(x_8|x_6, x_7)$

Graf bayesovské sítě s 8 veličinami

$$\kappa(x_1, \ldots x_8) = \pi_1(x_1)\pi_2(x_2)\pi_3(x_3)\pi_4(x_4|x_1, x_2) \ldots \pi_8(x_8|x_6, x_7)$$

Vlastnosti bayesovské sítě

1. $\kappa((x_\ell)_{\ell \in pa(i)}) = \prod_{i \in V} \pi_i(x_i | (x_\ell)_{\ell \in pa(i)})$ je vždy pravděpodobnostní distribucí.

Vlastnosti bayesovské sítě

1. $\kappa\big((x_\ell)_{\ell\in pa(i)}\big) = \prod_{i\in V} \pi_i\big(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)}\big)$ je vždy pravděpodobnostní distribucí.

2. Distribuce $\kappa\big((x_\ell)_{\ell\in pa(i)}\big)$ je *konsistentní* se všemi zadanými pravděpodobnostními distribucemi:

$$\forall i \in V \quad \Big(\kappa\big(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)}\big) = \pi_i\big(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)}\big)\Big)\,.$$

Vlastnosti bayesovské sítě

1. $\kappa((x_\ell)_{\ell\in pa(i)}) = \prod_{i\in V} \pi_i(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)})$ je vždy pravděpodobnostní distribucí.

2. Distribuce $\kappa((x_\ell)_{\ell\in pa(i)})$ je *konsistentní* se všemi zadanými pravděpodobnostními distribucemi:

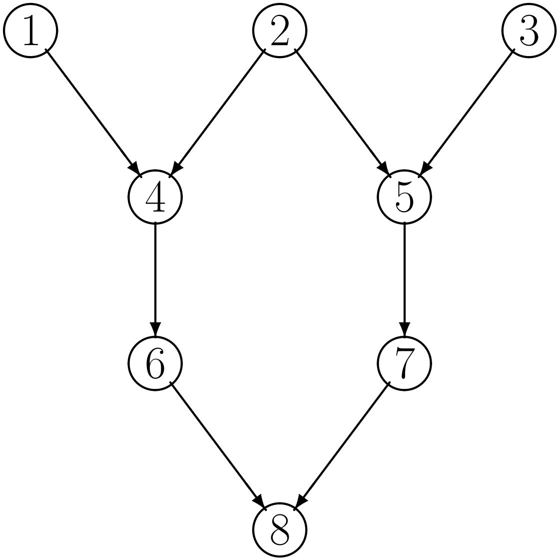
$$\forall i \in V \quad \left(\kappa(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)}) = \pi_i(x_i|(x_\ell)_{\ell\in pa(i)})\right).$$

3. Nezávislostní struktura distribuce $\kappa(x_\ell)_{\ell\in pa(i)})$ obsahuje všechny podmíněné nezávislosti určené grafem G:

Nechť $\{1, 2, 3, \ldots, n\} = V$ je uspořádání (očíslování) uzlů V takové, že rodiče jsou vždy před svými dětmi ($i \in pa(j) \Longrightarrow i < j$), potom pro všechna $i = 2, 3, \ldots, n$

$$X_i \perp\!\!\!\perp (X_j)_{\{1,\ldots,i-1\}\setminus pa(i)}|(X_\ell)_{\ell\in pa(i)}.$$

Bayesovská síť



Graf bayesovské sítě s 8 veličinami

uspořádání uzlů splňuje uvedenou podmínku, a proto

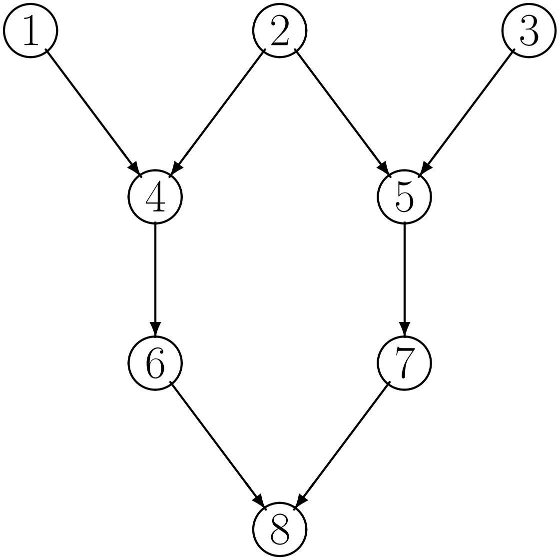
$$X_2 \perp\!\!\!\perp X_1$$
$$X_3 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2$$
$$X_4 \perp\!\!\!\perp X_3 | X_1, X_2$$
$$X_5 \perp\!\!\!\perp X_1, X_4 | X_2, X_3$$
$$X_6 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, X_3, X_5 | X_4$$
$$X_7 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, X_3, X_4, X_6 | X_5$$
$$X_8 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 | X_6, X_7$$

$$\kappa(x_1, \ldots x_8) = \pi(x_1)\pi(x_2)\pi(x_3)\pi(x_4|x_1, x_2) \ldots \pi(x_8|x_6, x_7)$$

d-separace

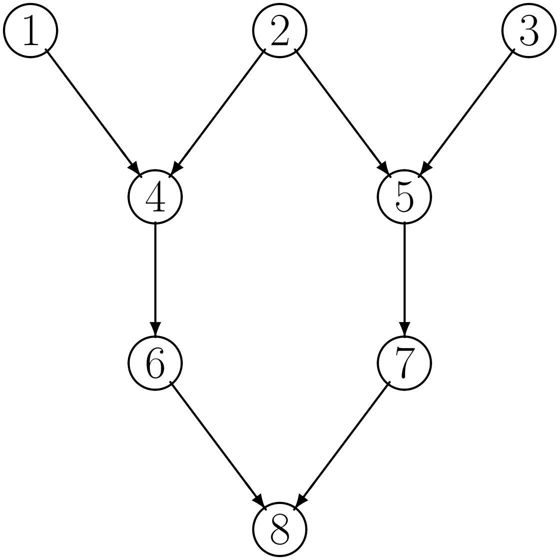
1. *Cestou spojující uzly* i a j budeme rozumět buď hranu spojující i a j (tedy buď $(i \longrightarrow j)$ nebo $(i \longleftarrow j)$), nebo zřetězení dvou cest: cesty spojující i a k neprocházející uzlem j s cestou spojující k a j neprocházející uzlem i. (Cesta tedy může obsahovat jednu hranu několikrát.)

Bayesovská síť



$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

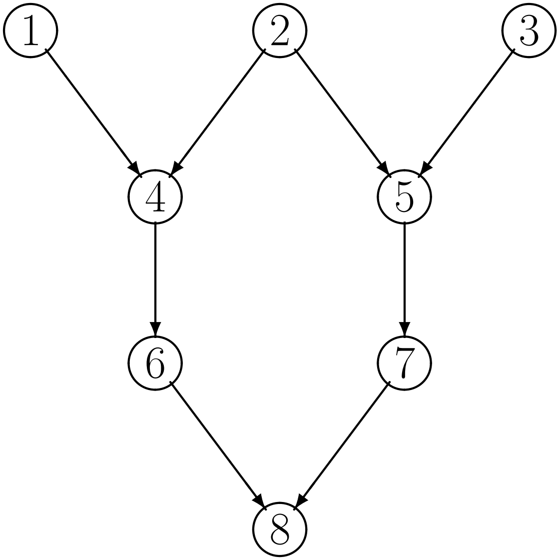
Bayesovská síť



$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7$$

Bayesovská síť



$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longleftarrow 3$$

d-separace

1. *Cestou spojující uzly* i a j budeme rozumět buď hranu spojující i a j (tedy buď $(i \longrightarrow j)$ nebo $(i \longleftarrow j)$), nebo zřetězení dvou cest: cesty spojující i a k neprocházející uzlem j s cestou spojující k a j neprocházející uzlem i. (Cesta tedy může obsahovat jednu hranu několikrát.) U každého výskytu uzlu k na cestě spojující i a j nastává jedna z následujících tří možností:

- uzel k je *průchozí*, jedná-li se o zřetězení $\longleftarrow k \longleftarrow$ nebo $\longrightarrow k \longrightarrow$,
- uzel je odstředný, jedná-li se o zřetězení $\longleftarrow k \longrightarrow$,
- uzel je dostředný, jedná-li se o zřetězení $\longrightarrow k \longleftarrow$,

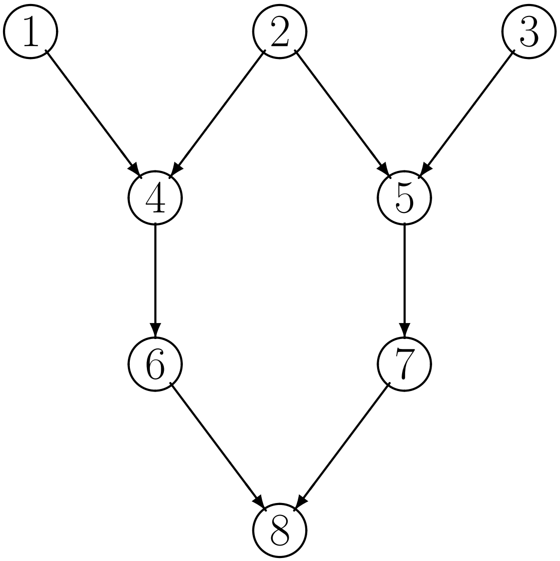
d-separace

1. *Cestou spojující uzly* i a j budeme rozumět buď hranu spojující i a j (tedy buď $(i \rightarrow j)$ nebo $(i \leftarrow j)$), nebo zřetězení dvou cest: cesty spojující i a k neprocházející uzlem j s cestou spojující k a j neprocházející uzlem i. (Cesta tedy může obsahovat jednu hranu několikrát.) U každého výskytu uzlu k na cestě spojující i a j nastává jedna z následujících tří možností:

- uzel k je *průchozí*, jedná-li se o zřetězení $\leftarrow k \leftarrow$ nebo $\rightarrow k \rightarrow$,
- uzel je odstředný, jedná-li se o zřetězení $\leftarrow k \rightarrow$,
- uzel je dostředný, jedná-li se o zřetězení $\rightarrow k \leftarrow$,

2. Nechť $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že množina M *blokuje cestu spojující uzly* i a j, jestliže na uvažované cestě existuje uzel $k \in M$, který je průchozí nebo odstředný, nebo na ní existuje uzel $\ell \notin M$, který je dostředný.

Bayesovská síť



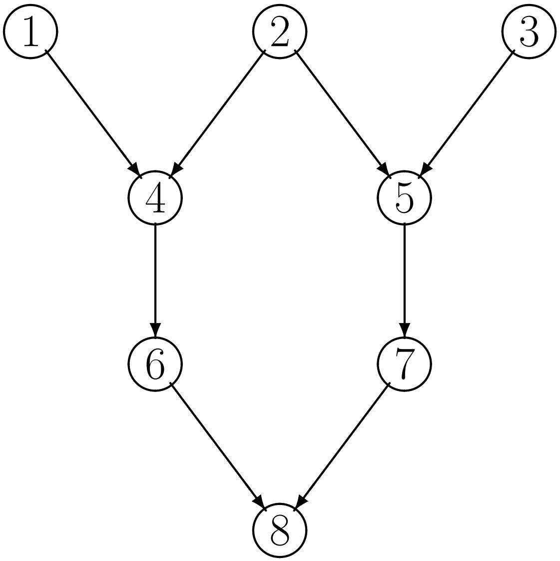
$$M = \emptyset$$

$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longleftarrow 3$$

Bayesovská síť



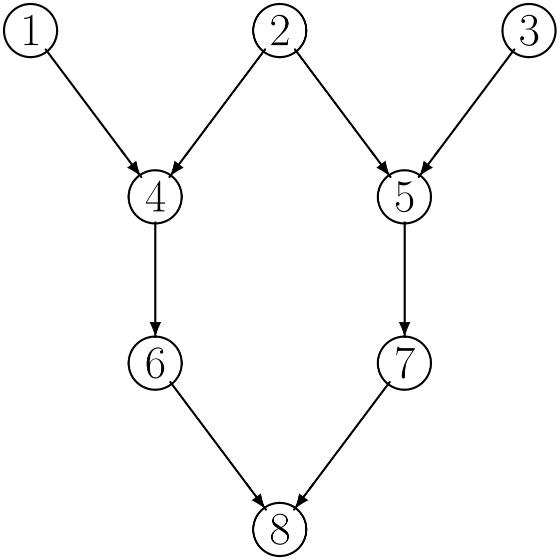
$$M = \{4, 5\}$$

$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longleftarrow 3$$

Bayesovská síť



$$M = \{5, 8\}$$

$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7$$

$$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5 \longleftarrow 3$$

d-separace

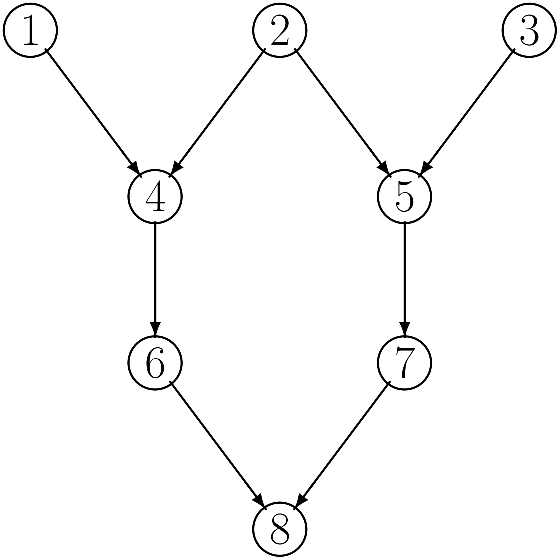
1. *Cestou spojující uzly* i a j budeme rozumět buď hranu spojující i a j (tedy buď $(i \rightarrow j)$ nebo $(i \leftarrow j)$), nebo zřetězení dvou cest: cesty spojující i a k neprocházející uzlem j s cestou spojující k a j neprocházející uzlem i. (Cesta tedy může obsahovat jednu hranu několikrát.) U každého výskytu uzlu k na cestě spojující i a j nastává jedna z následujících tří možností:
   - uzel k je *průchozí*, jedná-li se o zřetězení $\leftarrow k \leftarrow$ nebo $\rightarrow k \rightarrow$,
   - uzel je odstředný, jedná-li se o zřetězení $\leftarrow k \rightarrow$,
   - uzel je dostředný, jedná-li se o zřetězení $\rightarrow k \leftarrow$,
2. Nechť $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že množina M *blokuje cestu spojující uzly* i a j, jestliže na uvažované cestě existuje uzel $k \in M$, který je průchozí nebo odstředný, nebo na ní existuje uzel $\ell \notin M$, který je dostředný.
3. Nechť $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že množina M *d-separuje* uzly i a j, jestliže blokuje všechny cesty spojující i a j.

Tvrzení o podmíněné nezávislsti v bayesovských sítích

Jsou-li dva uzly $i, j \in V$ v grafu bayesovské sítě d-separovány množinou uzlů $M \subset V$, pak

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j | (X_\ell)_{\ell \in M}.$$

Bayesovská síť

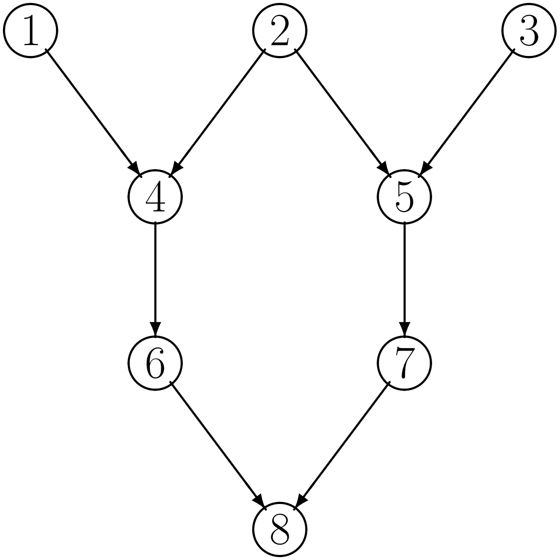


Cesty spojující 4 a 5

$$4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5$$

$$4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7 \longleftarrow 5$$

Bayesovská síť



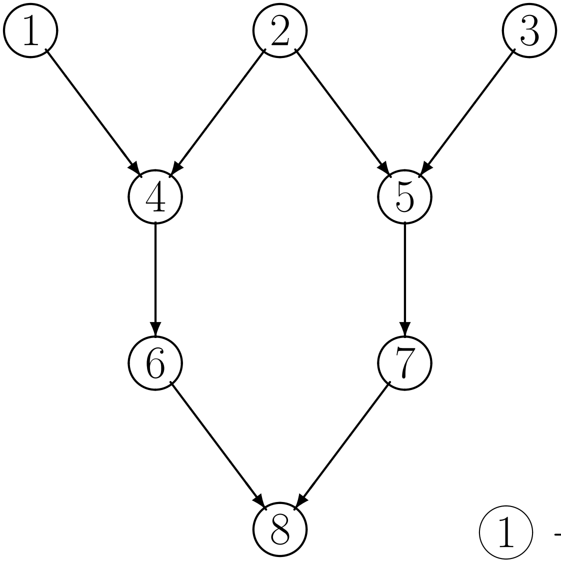
Cesty spojující 1 a 2

$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2$$

Bayesovská síť



Cesty spojující 1 a 5

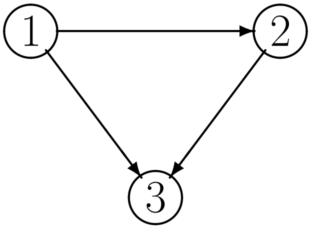
$$1 \longrightarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 7 \longleftarrow 5$$

$$1 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longleftarrow 6 \longleftarrow 4 \longleftarrow 2 \longrightarrow 5$$

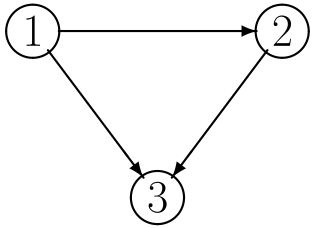
Otázka: existují dvě bayesovské sítě s různými grafy, které mají stejnou závislostní strukturu?

(Souvislé) bayesovské sítě o třech uzlech

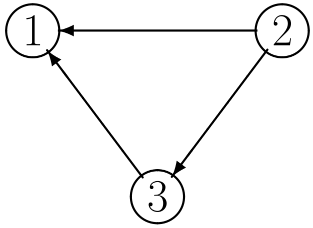


$$\pi_1(x_1)\pi_2(x_2|x_1)\pi_3(x_3|x_1, x_2)$$

(Souvislé) bayesovské sítě o třech uzlech



$$\pi_1(x_1)\pi_2(x_2|x_1)\pi_3(x_3|x_1,x_2)$$



$$\pi_1(x_2)\pi_2(x_3|x_2)\pi_3(x_1|x_2,x_3)$$

(Souvislé) bayesovské sítě o třech uzlech

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$ $\quad \pi_1(x_1)\pi_2(x_2|x_1)\pi_3(x_3|x_2)$

$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3$ $\quad \pi_1(x_3)\pi_2(x_2|x_3)\pi_3(x_1|x_2)$

$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3$ $\quad \pi_1(x_2)\pi_2(x_3|x_2)\pi_3(x_1|x_2)$

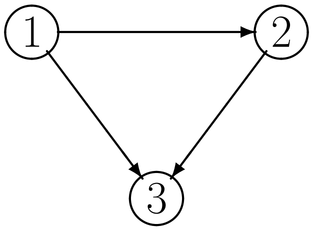
$1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ $\quad \pi_1(x_1)\pi_2(x_3)\pi_3(x_2|x_1, x_3)$

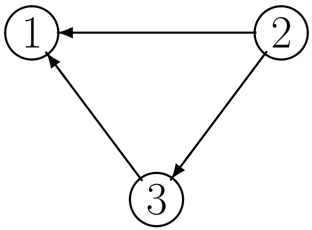
Tvrzení o ekvivalenci struktur bayesovských sítí

Dva acyklické orientované grafy definují stejnou nezávislostní strukturu, jestliže

1. hrany spojují stejné dvojice uzlů;
2. mají stejné “imorality”.

Bayesovské sítě o třech uzlech a třech hranách





Bayesovské sítě o třech uzlech a dvou hranách

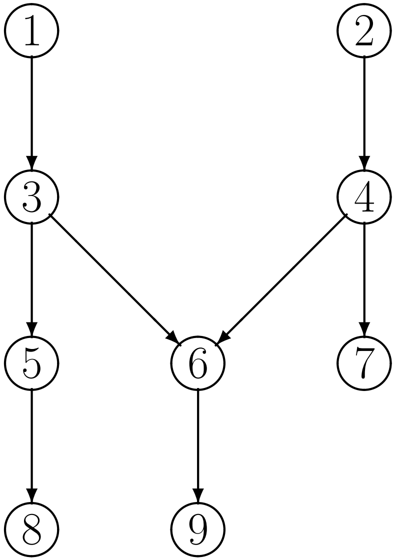
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$$

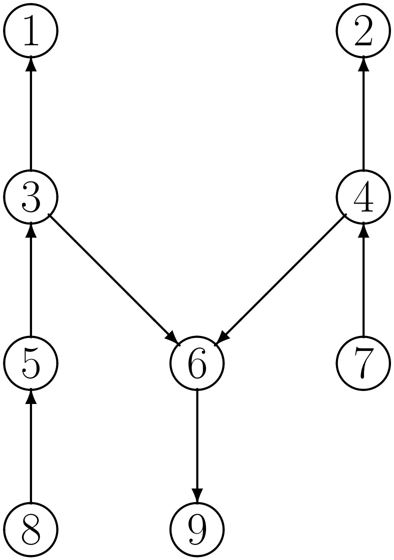
$$1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$$

$$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3$$

$$1 \rightarrow 2 \leftarrow 3$$

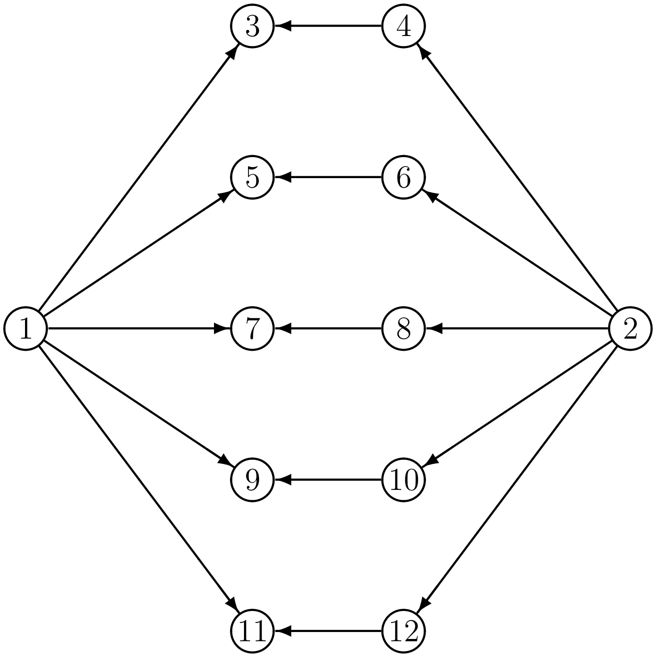
Další příklad ekvivalentních bayesovských sítí





Přednosti bayesovských sítí

- Umí modelovat skutečně složité situace



$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$$

$$X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 | X_3$$

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 | X_3, X_4$$

$$X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 | X_3, X_4, X_5$$

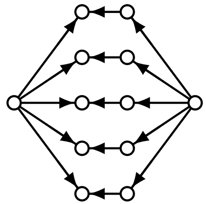
$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 | X_3, X_4, X_5, X_6$$

$$X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_2 | X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$$

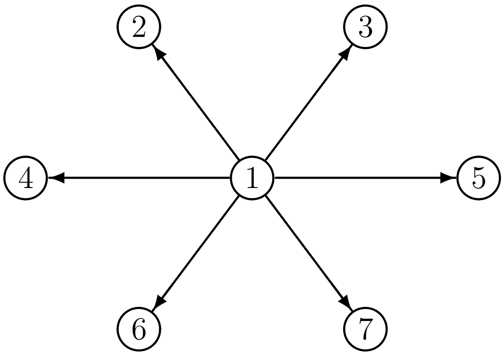
$$\vdots$$

Přednosti bayesovských sítí

- Umí modelovat skutečně složité situace



- Obecný pravděpodobnostní model - zahrnuje některé další, jako speciální případ



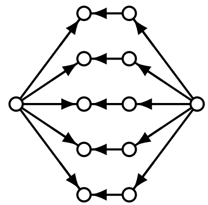
Naivní Bayes

$\forall i, j \in \{2, 3, \ldots, 7\},\ i \neq j$

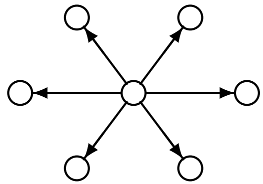
$X_i \not\perp\!\!\!\perp X_j | X_1$

Přednosti bayesovských sítí

- Umí modelovat skutečně složité situace



- Obecný pravděpodobnostní model - zahrnuje některé další, jako speciální případ



- Dostupný software umožňuje pracovat s poměrně velkými sítěmi

HUGIN, NETICA

Problémy spojené s používáním bayesovských sítí

většina je spojena s orientací hran:

Problémy spojené s používáním bayesovských sítí

většina je spojena s orientací hran:

- Kauzální interpretace

Problémy spojené s používáním bayesovských sítí

většina je spojena s orientací hran:

- Kauzální interpretace

- Nejednoznačnost grafu definujícícho nezávislostní strukturu zvyšuje složitost při učení

Problémy spojené s používáním bayesovských sítí

většina je spojena s orientací hran:

- Kauzální interpretace
- Nejednoznačnost grafu definujícícího nezávislostní strukturu zvyšuje složitost při učení
- Problémy při výpočtech

Problémy spojené s používáním bayesovských sítí

većšina je spojena s orientací hran:

- Kauzální interpretace

- Nejednoznačnost grafu definujícícho nezávislostní strukturu zvyšuje složitost při učení

- Problémy při výpočtech

výpočty se provádějí v jiném typu modelu; před prováděním výpočtů je třeba bayesovskou síť převést na rozložitelný model

Rozložitené modely

Jiný typ grafického markovského modelu (definovaný neorientovaným grafem)

Potřebujeme,

Rozložitené modely

Jiný typ grafického markovského modelu (definovaný neorientovaným grafem)

Potřebujeme,

- umět číst podmíněné nezávislosti z neorientovaného grafu,

Rozložitené modely

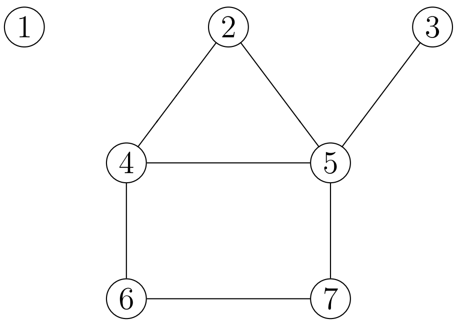
Jiný typ grafického markovského modelu (definovaný neorientovaným grafem)

Potřebujeme,

- umět číst podmíněné nezávislosti z neorientovaného grafu,
- pojem kliky

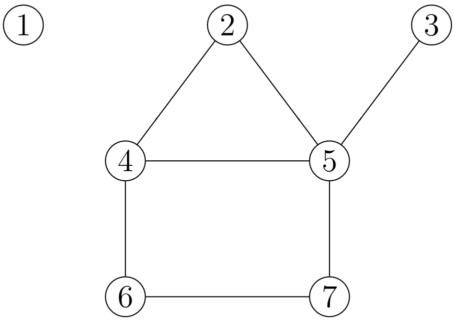
Definice separování

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, dva různé uzly $i, j \in V$ a množinu uzlů $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že uzly i a j jsou separovány množinou M, jestliže každá cesta z i do j obsahuje alespoň jeden uzel z M.



Definice separování

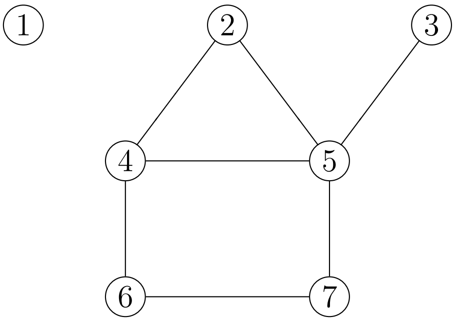
Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, dva různé uzly $i, j \in V$ a množinu uzlů $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že uzly i a j jsou separovány množinou M, jestliže každá cesta z i do j obsahuje alespoň jeden uzel z M.



1 a 7 jsou separovány $\emptyset$

Definice separování

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, dva různé uzly $i, j \in V$ a množinu uzlů $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že uzly i a j jsou separovány množinou M, jestliže každá cesta z i do j obsahuje alespoň jeden uzel z M.

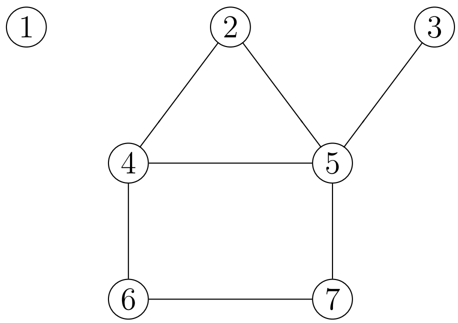


1 a 7 jsou separovány $\emptyset$

2 a 3 jsou separovány $\{5\}$

Definice separování

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$, dva různé uzly $i, j \in V$ a množinu uzlů $M \subseteq V \setminus \{i, j\}$. Říkáme, že uzly i a j jsou separovány množinou M, jestliže každá cesta z i do j obsahuje alespoň jeden uzel z M.



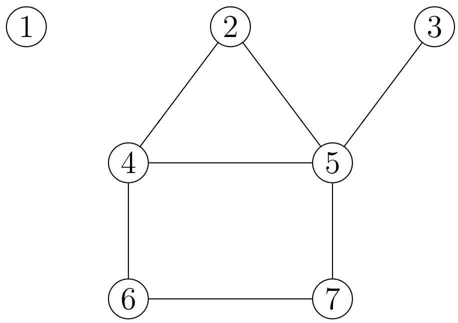
① a ⑦ jsou separovány $\emptyset$

② a ③ jsou separovány {⑤}

⑤ a ⑥ jsou separovány {①④⑦}

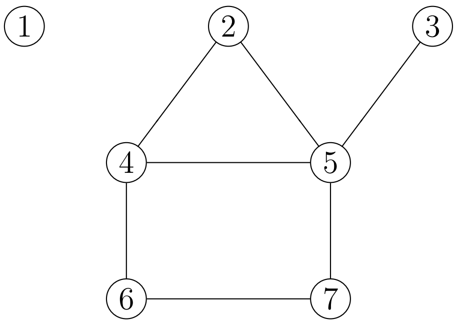
Definice kliky

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. Klikou nazýváme každou maximální množinu jeho uzlů, ve které je každá dvojice spojena hranou.



Definice kliky

Mějme neorientovaný graf $G = (V, E)$. Klikou nazýváme každou maximální množinu jeho uzlů, ve které je každá dvojice spojena hranou.



Seznam klik:

$\{1\}$ $\{2\,4\,5\}$

$\{3\,5\}$ $\{4\,6\}$

$\{5\,7\}$ $\{6\,7\}$

Definice rozložitelného (triangulovaného) grafu

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme rozložitelný (triangulovaný) jestliže

- neobsahuje cyklus délky větší než 3, který nemá tětivu
- jeho kliky $C_1, C_2, \ldots, C_m$ je možno uspořádat tak, že splňují *RIP*:

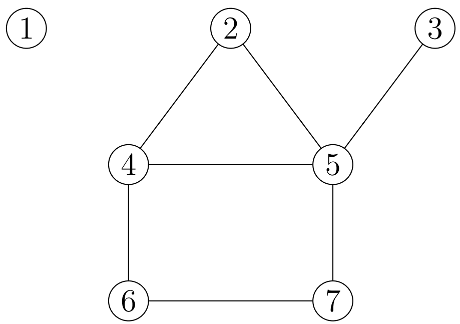
$$\forall i = 3, \ldots, m \;\; \exists k \; (1 \leq k < i) \;\; (C_i \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1}) \subset C_k).$$

Definice rozložitelného (triangulovaného) grafu

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme rozložitelný (triangulovaný) jestliže

- neobsahuje cyklus délky větší než 3, který nemá tětivu
- jeho kliky $C_1, C_2, \ldots, C_m$ je možno uspořádat tak, že splňují *RIP*:

$$\forall i = 3, \ldots, m \;\; \exists k \; (1 \leq k < i) \;\; (C_i \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1}) \subset C_k).$$



Seznam klik:

$\{①\}$ $\{②④⑤\}$

$\{③⑤\}$ $\{④⑥\}$

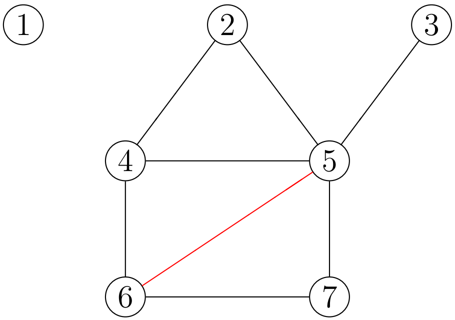
$\{⑤⑦\}$ $\{⑥⑦\}$

Definice rozložitelného (triangulovaného) grafu

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme rozložitelný (triangulovaný) jestliže

- neobsahuje cyklus délky větší než 3, který nemá tětivu
- jeho kliky $C_1, C_2, \ldots, C_m$ je možno uspořádat tak, že splňují *RIP*:

$$\forall i = 3, \ldots, m \;\; \exists k \; (1 \leq k < i) \;\; (C_i \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1}) \subset C_k).$$



Seznam klik:

$\{1\}$ $\{2\,4\,5\}$

$\{3\,5\}$ $\{4\,5\,6\}$

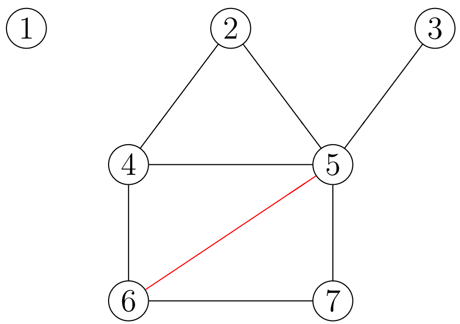
$\{5\,6\,7\}$

Definice rozložitelného (triangulovaného) grafu

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme rozložitelný (triangulovaný) jestliže

- neobsahuje cyklus délky větší než 3, který nemá tětivu
- jeho kliky $C_1, C_2, \ldots, C_m$ je možno uspořádat tak, že splňují *RIP*:

$$\forall i = 3, \ldots, m \;\; \exists k \; (1 \leq k < i) \;\; (C_i \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1}) \subset C_k).$$



Seznam klik:

$\{①\}$ $\{②④⑤\}$

$\{③⑤\}$ $\{④⑤⑥\}$

$\{⑤⑥⑦\}$

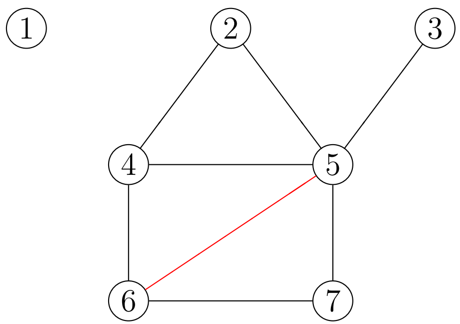
$\{④⑤⑥\}, \{③⑤\}, \{②④⑤\}, \{①\}, \{⑤⑥⑦\}$

Definice rozložitelného (triangulovaného) grafu

Neorientovaný graf $G = (V, E)$ nazýváme rozložitelný (triangulovaný) jestliže

- neobsahuje cyklus délky větší než 3, který nemá tětivu
- jeho kliky $C_1, C_2, \ldots, C_m$ je možno uspořádat tak, že splňují *RIP*:

$$\forall i = 3, \ldots, m \;\; \exists k \; (1 \leq k < i) \;\; (C_i \cap (C_1 \cup \ldots \cup C_{i-1}) \subset C_k).$$



Seznam klik:

{1} {2 4 5}
{3 5} {4 5 6}
{5 6 7}

{3 5}, {2 4 5}, {1}, {5 6 7}, {4 5 6}

Tvrzení o jednoznačnosti rozložitelného modelu

Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jsou kliky rozložitelného grafu $G = (V, E)$. Jsou-li $\pi_1((x_i)_{i\in C_1}), \pi_2((x_i)_{i\in C_2}), \ldots, \pi_m((x_i)_{i\in C_m})$ po dvojicích konsistentní pravděpodobnostní distribuce, pak existuje právě jedna distribuce $\kappa((x_i)_{i\in V})$, pro kterou platí

(i) $\forall j = 1, \ldots, m \;\; \kappa((x_i)_{i\in C_j}) = \pi_j((x_i)_{i\in C_j})$;

(ii) jsou-li j a k v G separovány množinou M, pak

$$X_j \perp\!\!\!\perp X_k | (X_i)_{i\in M}[\kappa].$$

Tvrzení o jednoznačnosti rozložitelného modelu

Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_m$ jsou kliky rozložitelného grafu $G = (V, E)$. Jsou-li $\pi_1((x_i)_{i\in C_1}), \pi_2((x_i)_{i\in C_2}), \ldots, \pi_m((x_i)_{i\in C_m})$ po dvojicích konsistentní pravděpodobnostní distribuce, pak existuje právě jedna distribuce $\kappa((x_i)_{i\in V})$, pro kterou platí

(i) $\forall j = 1, \ldots, m \;\; \kappa((x_i)_{i\in C_j}) = \pi_j((x_i)_{i\in C_j})$;

(ii) jsou-li j a k v G separovány množinou M, pak

$$X_j \perp\!\!\!\perp X_k | (X_i)_{i\in M}[\kappa].$$

Jsou-li navíc $C_1, C_2, \ldots, C_m$ uspořádány tak, že splňují *RIP*, pak

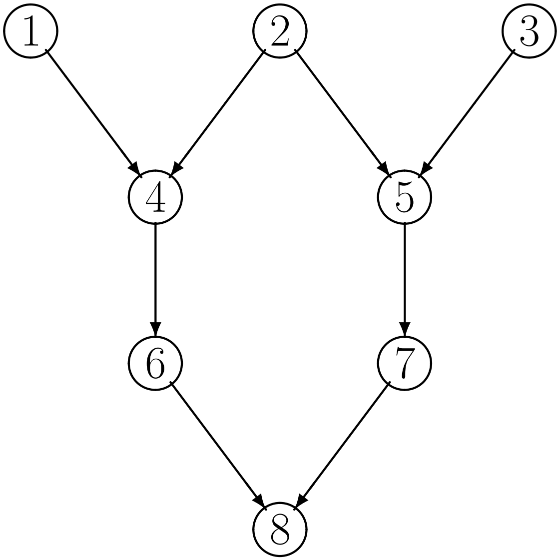
$$\kappa((x_i)_{i\in V}) = \prod_{j=1}^{m} \pi_j((x_i)_{i\in C_i\setminus(C_1\cup\ldots\cup C_{i-1}} | (x_i)_{i\in C_i\cap(C_1\cup\ldots\cup C_{i-1}}).$$

Lokální výpočty dle Lauritzena a Spiegelhaltera

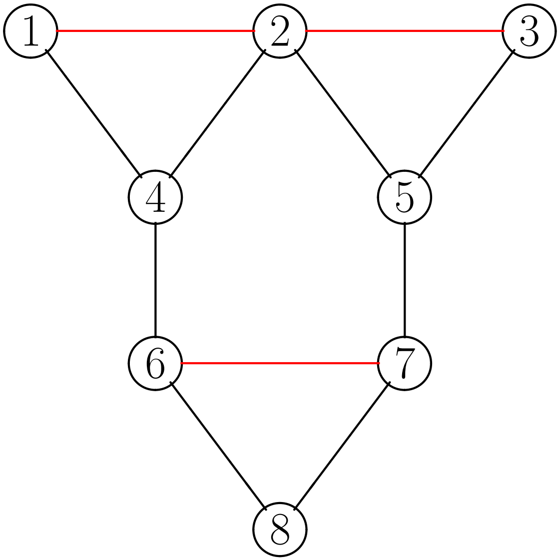
Převedení bayesovské sítě na rozložitelný model

- moralizace
- triangularizace

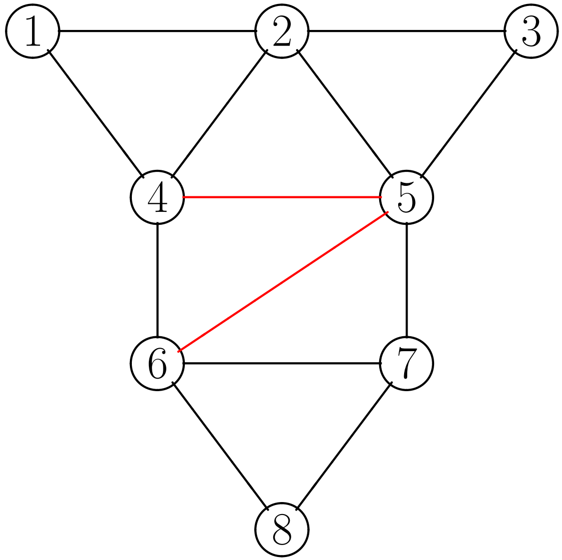
Bayesovská síť



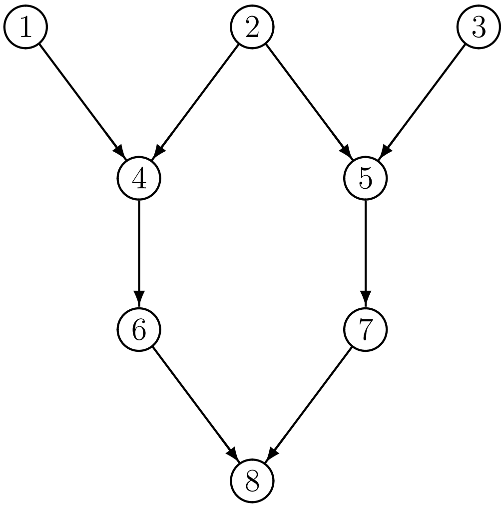
Moralizovaný graf



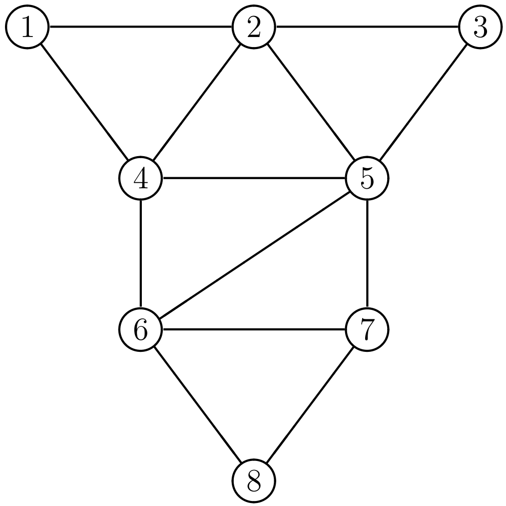
Triangularizovaný (rozložitelný) graf



Bayesovská síť

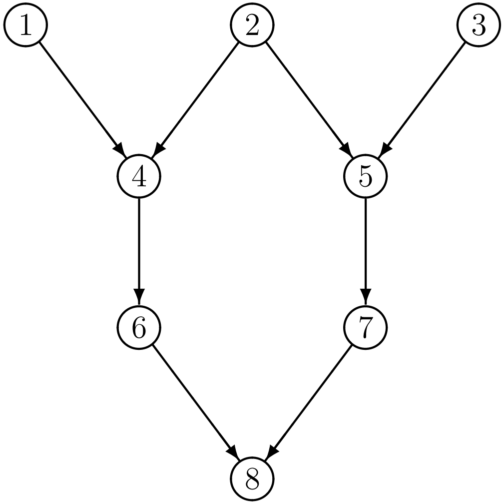


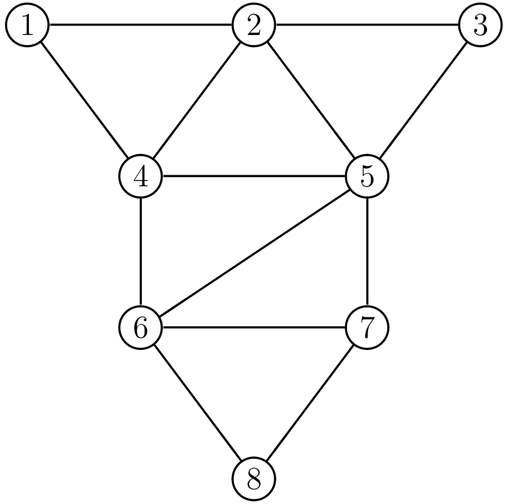
rozložitelný graf



Bayesovská síť

rozložitelný graf





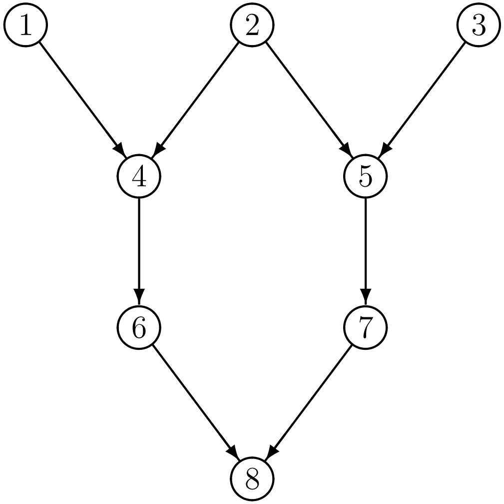
Čím platíme za pro výpočty výhodnější tvar?

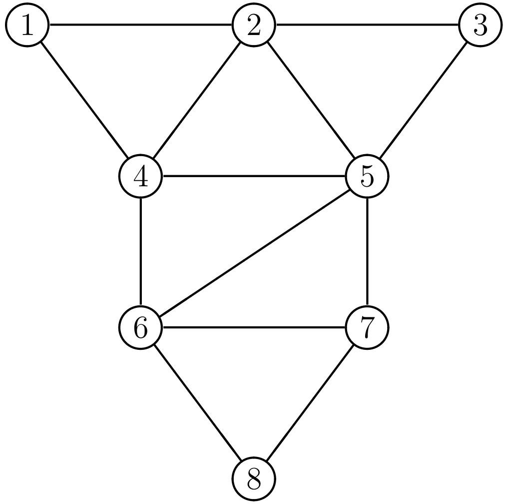
větší paměťové nároky:

1+1+1+4+4+2+2+4=19

7+7+7+7+7+7=42

Bayesovská síť   rozložitelný graf





Čím platíme za pro výpočty výhodnější tvar?

větší paměťové nároky:

1+1+1+4+4+2+2+4=19   7+7+7+7+7+7=42

"ztráta" řady podmíněných nezávislostí

Shrnutí

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf
   a systém podmíněných pravděpodobností

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností

2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí

3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem

4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla

5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů “malý”

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla
5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů "malý"

6. Za tím účelem můžeme zavést "umělé" uzly

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla
5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů "malý"
6. Za tím účelem můžeme zavést "umělé" uzly

7. Můžeme též otáčet hrany aniž bychom změnili strukturu sítě

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla
5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů "malý"
6. Za tím účelem můžeme zavést "umělé" uzly
7. Můžeme též otáčet hrany aniž bychom změnili strukturu sítě

8. Výpočty provádíme pomocí vhodných programů (HUGIN, NETIKA)

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla
5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů "malý"
6. Za tím účelem můžeme zavést "umělé" uzly
7. Můžeme též otáčet hrany aniž bychom změnili strukturu sítě
8. Výpočty provádíme pomocí vhodných programů (HUGIN, NETIKA)

9. Výpočty se neprovádí v bayesovské síti, ale v rozložitelném modelu

Shrnutí

1. Bayesovská síť je dvojice: acyklický graf a systém podmíněných pravděpodobností
2. Distribuce reprezentovaná sítí je součin zadaných podmíněných distribucí
3. Tato distribuce má speciální závislostní strukturu popsanou grafem
4. Nezávislosti umíme zjistit pomocí d-separačního pravidla
5. Při konstrukci sítě je nutno udržet počet rodičů jednotlivých uzlů "malý"
6. Za tím účelem můžeme zavést "umělé" uzly
7. Můžeme též otáčet hrany aniž bychom změnili strukturu sítě
8. Výpočty provádíme pomocí vhodných programů (HUGIN, NETIKA)
9. Výpočty se neprovádí v bayesovské síti, ale v rozložitelném modelu

Děkuji Vám za sledování této přednášky

Radim Jiroušek

Literatura doporučená k dalšímu studiu

1. Jensen, Finn V.: *Introduction to Bayesian Networks.* UCL Press, London, 1996.
2. Jensen, Finn V.: *Bayesian Networks and Decision Graphs.* Springer Verlag, 2001.
3. Lauritzen, Stephen L.: *Graphical Models.* Clarendon Press, Oxford, 1996.
4. Neapolitan, Richard E.: *Learning Bayesian Networks.* Prentince Hall, Upper Saddle River, NJ, 2003.