Optimalizace

Aplikace Lagrangeových multiplikátorů

Tomáš Kroupa, Lukáš Adam

FEL ČVUT

Úloha s omezeními ve tvaru rovností: Připomenutí

Úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{za podmínek} \quad & g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Předpokládáme, že f i $\mathbf{g}$ jsou spojitě diferencovatelné
- Lagrangián

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

Lineární omezení

Pokud $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak řešíme úlohu

$$\min\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Lagrangeova funkce

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}).$$

Podmínky optimality přes Lagrangeovu funkci

$$f'(\mathbf{x}) = L'_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^\mathsf{T}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Pro tento přístup je nutná podmínka regularity.

Zákon odrazu z Fermatova principu

Fermatův princip

Cesta mezi libovolnými dvěma body má takový tvar, aby ji světlo proběhlo za extrémní čas (větší nebo menší než jí blízké dráhy).

Místa paprsku před $\mathbf{x}_0$ a po dopadu $\mathbf{x}_1$ na zrcadlo parametrizované přes $g(\mathbf{a}) = 0$. Tedy řešíme úlohu

$$\min / \max \left\{ \|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{a} - \mathbf{x}_1\| \mid g(\mathbf{a}) = 0 \right\}.$$

Podmínky optimality

$$\frac{\mathbf{a} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\mathbf{a} - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_1\|} + \lambda \nabla g(\mathbf{a}) = 0$$

Projektované gradienty

Dvojité iterace

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k),$$
$$\mathbf{x}_{k+1} = P_X(\mathbf{y}_{k+1}),$$

kde P_X je projekce na přípustnou množinu X.

Projekce musí být jednoduchá na spočtení. Například

$$X_1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\},$$
$$X_2 = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le r\},$$

Numerické metody: SQP

Sekvenciální kvadratické programování

Update

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x}_{k} \\ \delta\boldsymbol{\lambda}_{k} \end{pmatrix}$$

Krok

$$\begin{pmatrix} f''(\mathbf{x}_k) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i''(\mathbf{x}_k) & \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k)^\top \\ \mathbf{g}'(\mathbf{x}_k) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f'(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{g}'(x_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_k \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \end{pmatrix}$$

Metoda je přímá aplikace Newtonovy metody na podmínky optimality.

Podmínky druhého řádu: Připomenutí

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v $\mathbf{x}$. Je-li $\mathbf{x}$ stacionární bod, platí:

- Pokud je $\mathbf{x}$ lokální minimum, pak je Hessova matice $f''(\mathbf{x})$ pozitivně semidefinitní.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ pozitivně definitní, pak je $\mathbf{x}$ ostré lokální minimum.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ indefinitní, pak $\mathbf{x}$ není lokální extrém.

Podmínky druhého řádu

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou dvakrát diferencovatelné v $\mathbf{x}$. Je-li $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ stacionární bod Lagrangeovy funkce, platí:

- Pokud je $\mathbf{x}$ lokální minimum, pak je Hessova matice $L''_{xx}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ pozitivně semidefinitní na $\operatorname{null} \mathbf{g}'(\mathbf{x})$.
- Pokud je $L''_{xx}(\mathbf{x})$ pozitivně definitní na $\operatorname{null} \mathbf{g}'(\mathbf{x})$, pak je $\mathbf{x}$ ostré lokální minimum.
- Pokud je $L''_{xx}(\mathbf{x})$ indefinitní na $\operatorname{null} \mathbf{g}'(\mathbf{x})$, pak $\mathbf{x}$ není lokální extrém.

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 10). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.