Errata ke skriptům Optimalizace

Tomáš Werner

31. března 2020

- Oprava chyby ve větě 7.6 (napraví se, když předpokládáme singulární čísla řazená sestupně, na rozdíl od vlastních čísel):

  Věta 1 (Eckart-Young). *Nechť* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ *je SVD matice* $\mathbf{A}$ *a* $k \leq p = \min\{m, n\}$. *Řešení úlohy (7.22) je*

  $$\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{S}_k\mathbf{V}^T = s_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + s_k\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^T, \tag{1}$$

  kde matice $\mathbf{S}_k = \mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_k & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ *se získá vynulováním* $p - k$ *nejmenších diagonálních prvků matice* $\mathbf{S}$ *(kde předpokládáme, že singulární čísla jsou seřazena sestupně).*

  Důkaz. Ze (7.23) víme, že optimální řešení úlohy (7.22) je $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ kde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ je první blok matice $\mathbf{V} = \begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ve spektrálním rozkladu $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$. Zde předpokládáme, že vlastní čísla matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ jsou řazená sestupně (na rozdíl od singulárních čísel), proto jsme museli zaměnit $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$. Z (7.31) víme, že matici $\mathbf{V}$ ve spektrálním rozkladu $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ lze spočítat jako matici $\mathbf{V}$ v singulárním rozkladu $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$. Zbytek je cvičení na úpravy maticových výrazů:

  $$\begin{aligned}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{X}^T\\ \mathbf{Y}^T\end{bmatrix}\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{X}^T\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}^T\mathbf{X}\end{bmatrix}\mathbf{X}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_k\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{X}^T\\ = \mathbf{U}\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_k & \mathbf{0}_{k,n-k}\\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{0}_{n-k,n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}^T\\ \mathbf{Y}^T\end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{S}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_k & \mathbf{0}_{k,n-k}\\ \mathbf{0}_{n-k,k} & \mathbf{0}_{n-k,n-k}\end{bmatrix}\mathbf{V}^T = \mathbf{U}\mathbf{S}_k\mathbf{V}^T. \quad \square\end{aligned}$$