Optimalizace

Konvexní optimalizační úlohy

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Konvexní optimalizace

Definice

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Úloha konvexní optimalizace je optimalizační úloha

$$\min \ f(\mathbf{x}) \qquad \text{za podmínky } \mathbf{x} \in X.$$

Konvexní úlohu vyřešíme nalezením lokálního minima!

Věta

Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní na konvexní množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak každé lokální minimum funkce f na X je globální.

Konvexní optimalizační úloha ve standardním tvaru

- $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konvexní
- $g_1, \ldots, g_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou konvexní
- $h_1, \ldots, h_\ell\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jsou afinní

Maticově: $\min \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & f(x_1, \ldots, x_n) \\
\text{za podmínek} \quad & g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, \ldots, \ell \\
& x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Třídy konvexních optimalizačních úloh

- Lineární programování
  f, g_i, h_i afinní
- Kvadratické programování
  f konvexní kvadratická a g_i, h_i afinní
- Kvadratické programování s kvadratickými omezeními
  f, g_i konvexní kvadratické a h_i afinní
- Programování na kuželu druhého řádu

Kvadratické programování

- f je kvadratická
- g_i, h_i jsou afinní

Maticově

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{C}\mathbf{x} \leq \mathbf{d} \\ & \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{f} \end{aligned}$$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^\ell$

Je to konvexní úloha, právě když $\mathbf{A}$ je pozitivně semidefinitní.

Kvadratické programování – příklady konvexních úloh

Řešení přeurčené soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\min\{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Lze převést na řešení soustavy lineárních rovnic.

Řešení přeurčené soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s lineárními omezeními

$$\min\{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \mid \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

Lze převést na řešení soustavy lineárních rovnic.

Řešení přeurčené soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ s intervalovými omezeními

$$\min\{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \mid \mathbf{c} \le \mathbf{x} \le \mathbf{d},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

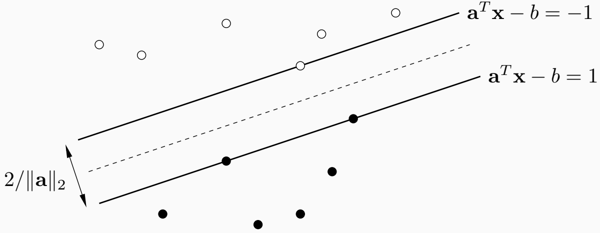
Kvadratické programování – Support vector machines (SVM)

Pro m bodů $(\mathbf{x}_i, y_i) \in \mathbb{R}^n \times \{-1, 1\}$ hledáme oddělující nadrovinu.
Tedy hledáme $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$y_i(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i - b) > 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Vydělením $(\mathbf{a}, b)$ vhodným kladným číslem je to ekvivalentní

$$y_i(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i - b) \geq 1, \qquad i = 1, \dots, m.$$



$$\min\{\|\mathbf{a}\|_2^2 \mid y_i(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}_i - b) \geq 1,\ i = 1, \dots, m\}$$

Kvadratické programování s kvadratickými omezeními

- f, g_i jsou kvadratické
- h_i jsou afinní

Je to konvexní úloha, právě když jsou funkce f a g_i konvexní.

Kam umístit záchrannou stanici?

Hledáme lokaci $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ pro záchrannou službu tak, aby *nejdelší vzdálenost* k místům $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^2$ byla minimální:

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{m} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2 \quad \text{z.p. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$$

Ekvivalentně – hledáme nejmenší kruh obsahující zadané body:

$$\text{Minimalizuj} \quad y \qquad \text{z.p. } \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2^2 \leq y, \quad i = 1, \dots, m.$$

Programování na kuželu druhého řádu

- f a $h_1, \dots, h_\ell$ jsou afinní
- $g_i(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 - (\mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i)$ pro $i = 1, \dots, m$
- Podmínka $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ znamená $(\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i) \in K_2^n$, kde

$$K_2^n := \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq y\}$$

je epigraf eukleidovské normy (tzv. kužel druhého řádu)

Maticově (pro $\ell = 0$)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \|\mathbf{A}_i\mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i \end{aligned}$$

- $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$
- $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i}$
- $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, $d_i \in \mathbb{R}$

Programování na kuželu druhého řádu – geometrický medián

Který bod minimalizuje součet vzdáleností od daných bodů?

Fermat-Weberův problém

Pro body $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ najděte minimum funkce

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2.$$

To je ekvivalentní úloze

$$\begin{aligned} \min \quad & z_1 + \cdots + z_m \\ \text{za podmínek} \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|_2 \le z_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 16). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.

F. J. Aragón, M. A. Goberna, M. A. López, M. M. Rodríguez. *Nonlinear optimization*. Springer, 2019.