Optimalizace

Celočíselné LP

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Celočíselné lineární programování (ILP)

Celočíselný LP

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

LP s binárními proměnnými

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n\}$$

LP relaxace poslední úlohy je úloha

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0, 1]^n\}$$

- Je-li původní úloha přípustná, LP relaxace je také přípustná
- Optimální hodnota LP relaxace je dolním odhadem optimální hodnoty původní úlohy

Integrality gap

Mezera celočíselnosti je rozdíl mezi pravou a levou stranou:

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n\} \leq \min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n\}$$

Optimální řešení LP relaxace

- Jen výjimečně je to i optimální řešení původní úlohy
- Někdy umožní sestrojit řešení s požadovanou přesností
- Pro některé úlohy je opt. hodnota LP relaxace nicneříkající

Příklad

Hledáme vzájemně jednoznačné přiřazení učitelů k předmětům, které bude maximalizovat skóre:

Table 20.3 Evaluation of Teachers' Performances

	Course 1	Course 2	Course 3	Course 4	Course 5
Teacher 1	7	5	4	4	5
Teacher 2	7	9	7	9	4
Teacher 3	4	6	5	8	5
Teacher 4	5	4	5	7	4
Teacher 5	4	5	5	8	9

V. Chvátal. *Linear Programming*. 1983.

Přiřazovací problém

- Jsou zadány 2 množiny n objektů a ceny c_{ij} za jejich spárování
- Přiřazení reprezentujeme permutační maticí o složkách x_{ij}
- Hledáme přiřazení minimalizující celkovou cenu

Assignment Problem s binárními proměnnými $x_{ij} \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

LP relaxace přiřazovacího problému

V relaxované úloze je hledané přiřazení vyjádřeno pomocí dvojitě stochastické matice o složkách x_{ij}.

Assignment Problem s reálnými proměnnými $x_{ij} \in [0, 1]$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Optimální řešení přiřazovacího problému

Věta

Pro přiřazovací problém platí:

1. LP relaxace i původní úloha mají stejnou optimální hodnotu
2. Mezi optimálními řešeními LP relaxace existuje celočíselné

Je to důsledek Birkhoff–von Neumannovy věty:

- Množina všech dvojitě stochastických matic $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je omezený konvexní polyedr v $\mathbb{R}^{n^2}$
- Extremální body toho polyedru jsou permutační matice

Příklad – optimální přiřazení učitelů k předmětům (Julia)

```julia
import Pkg
Pkg.add("JuMP")
Pkg.add("GLPK")
using JuMP
using GLPK

A = [
    7 5 4 4 5;
    7 9 7 9 4;
    4 6 5 8 5;
    5 4 5 7 4;
    4 5 5 8 9;
]

model = Model(GLPK.Optimizer)

@variable(model, 0 <= X[1:5, 1:5] <= 1);
@constraint(model, sum(X, dims=1) .== 1);
@constraint(model, sum(X, dims=2) .== 1);
@objective(model, Max, sum(A .* X));

optimize!(model)
optX = Int.(value.(X))
optvalue = sum(A .* optX)
@show optX
@show optvalue
```

Optimální řešení

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Optimální hodnota 38

Nejmenší vrcholové pokrytí

Kolik hlídačů musíme umístit do vrcholů grafu, aby byla každá hrana monitorována?

Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X.

Minimal Vertex Cover s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, kde $i \in V$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \geq 1, \quad \{i, j\} \in E \end{aligned}$$

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí

Úloha s proměnnými $x_i \in [0,1]$, kde $i \in V$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \geq 1, \quad \{i,j\} \in E \end{aligned}$$

- Na příkladu úplného grafu nad 3 vrcholy je vidět, že dostaneme kladnou mezeru celočíselnosti
- Optimální hodnota původní úlohy je totiž 2, ale optimální hodnota relaxované úlohy je 1.5

LP relaxace nejmenšího vrcholového pokrytí – vlastnosti

- y^* je optimální hodnota původní úlohy
- x_i $(i \in V)$ optimální řešení relaxované úlohy, $y := \sum_{i \in V} x_i$
- Dolů zaokrouhlené řešení relaxované úlohy $\bar{x}_i := \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ je přípustné pro původní úlohu, $\bar{y} := \sum_{i \in V} \bar{x}_i$

Přestože neznáme y^*, jsme schopni posoudit kvalitu aproximace:

Tvrzení

Pro každý graf (V, E) platí $y^* \leq \bar{y} \leq 2y^*$ a $y^* \geq y \geq \frac{1}{2} y^*$.

Největší nezávislá množina

Kolik mohu pozvat na party rozhádaných kamarádů, abych nezkazil zábavu?

Podmnožina $X \subseteq V$ neorientovaného grafu (V, E) je nezávislá, pokud žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in V$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \{i, j\} \in E \end{aligned}$$

LP relaxace – největší nezávislá množina

Maximum Independent Set s proměnnými $x_i \in [0,1]$, $i \in V$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \{i,j\} \in E \end{aligned}$$

- Relaxace má přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2}(i \in V)$ o hodnotě $\frac{1}{2}|V|$
- Tedy optimální hodnota LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$
- Ovšem např. pro úplný graf je optimální hodnota původní úlohy $y^* = 1$, tedy mezera celočíselnosti je $\geq \frac{1}{2}|V| - 1$

Největší nezávislá množina – neaproximovatelnost

- Velikost maximální nezávislé množiny nelze efektivně aproximovat pomocí algoritmu s garancí nezávislou na velikosti grafu
- Jde o tzv. APX-těžkou úlohu

Věta

Pro každé $\epsilon > 0$ je NP-těžké najít přípustné řešení $\bar{x}_i \in \{0, 1\}$ ($i \in V$) splňující

$$\sum_{i \in V} \bar{x}_i \geq \frac{y^*}{\epsilon}.$$

Další úlohy

- Problém obchodního cestujícího
- Toky v sítích
- Problém batohu
- Rozvrhování

Smíšené celočíselné programování (MILP)

$$\min \left\{ \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{y} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n_1},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_2} \right\}$$

Algoritmy pro řešení celočíselných úloh

Úloha celočíselného programování je NP-těžká. Nejpoužívanější algoritmy obvykle využívají v některém kroku lineární programování, pro nějž existuje polynomiální algoritmus.

- Metoda větví a mezí (branch and bound)
- Metoda sečných nadrovin

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 11). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.

J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.