Optimalizace

Aplikace duality v LP

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Příklad: Minimum z daných čísel

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} \quad & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & y \\ \text{za podm.} \quad & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \quad \forall i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & y \\ \text{za podm.} \quad & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

Příklad: Minimum z daných čísel

$$\begin{array}{rrcl} \min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & & \\ \text{za podm.} & x_1 + \cdots + x_n & = & 1 \\ & x_i & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcll} \max & y & & & \\ \text{za podm.} & y & \in & \mathbb{R} & \\ & y & \leq & c_i & \forall i \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\ \text{za podm.} & \mathbf{1}^T\mathbf{x} & = & 1 \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \max & y & & \\ \text{za podm.} & y & \in & \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} & \leq & \mathbf{c} \end{array}$$

- Silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je $\min\{c_1, \ldots, c_n\}$
- Slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \ldots, c_n\} \geq y$
- Komplementarita: optimální $\mathbf{x}^*, y^*$ splňují pro každé i

$$x_i^* = 0 \quad \text{nebo} \quad y^* = c_i$$

Význam duálních proměnných pro výrobní program

Primární úloha s proměnnými $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

- $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ je vektor jednotkových zisků z prodeje výrobků
- Pro materiál i udává i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ jednotkové spotřeby
- $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Význam duálních proměnných pro výrobní program

Primární úloha s proměnnými $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

- $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ je vektor jednotkových zisků z prodeje výrobků
- Pro materiál i udává i-tý řádek matice $\mathbf{A}$ jednotkové spotřeby
- $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ za podmínek $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Duální úloha s proměnnými $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$

- Proměnná y_i udává jednotkovou cenu materiálu i
- Pro výrobek j udává j-tý řádek matice $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ materiálovou náročnost

Minimalizuj celkové náklady $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ za podmínek $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \geq \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

Příklad: Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 120l & + & 76h & & \\
\text{z. p.} & 2l & + & 1.5h & \leq & 100 \\
& 0.4l & + & 0.2h & \leq & 16 \\
& & & l & \geq & 0 \\
& & & h & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcr}
\min & 100a & + & 16b & & \\
\text{z. p.} & & & a & \geq & 0 \\
& & & b & \geq & 0 \\
& 2a & + & 0.4b & \geq & 120 \\
& 1.5a & + & 0.2b & \geq & 76
\end{array}$$

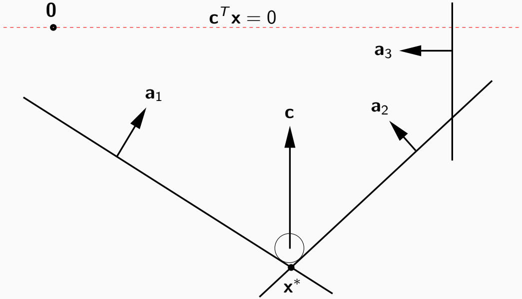
Příklad: Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & 120l & + & 76h & & \\
\text{z. p.} & 2l & + & 1.5h & \leq & 100 \\
& 0.4l & + & 0.2h & \leq & 16 \\
& & & l & \geq & 0 \\
& & & h & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcrcr}
\min & 100a & + & 16b & & \\
\text{z. p.} & & & a & \geq & 0 \\
& & & b & \geq & 0 \\
& 2a & + & 0.4b & \geq & 120 \\
& 1.5a & + & 0.2b & \geq & 76
\end{array}$$

Interpretace

- a, b jsou jednotkové ceny brambor a oleje
- *Překupník* se ptá: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální řešení jsou $(l^*, h^*) = (20, 40)$, $(a^*, b^*) = (32, 140)$
- Slabá duality: $120l + 76h \leq 100a + 16b$
- Silná dualita: optimální hodnota 5440 vyjadřuje rovnováhu

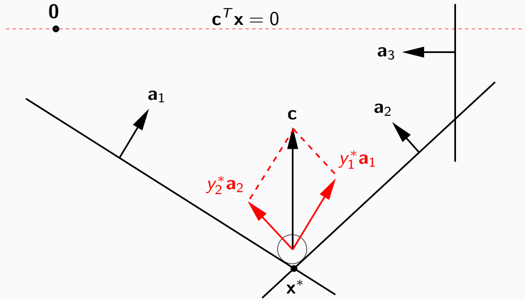
Fyzikální interpretace: Míček v mnohostěnu



$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\}$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je minimální v bodě $\mathbf{x}^*$

Fyzikální interpretace: Míček v mnohostěnu



$$\min\{\,\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,\} \;=\; \max\{\,\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\,\}$$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je minimální v bodě $\mathbf{x}^*$
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $\mathbf{c} = \sum_i y_i^*\mathbf{a}_i = \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$
- Když $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ (míček se stěny i nedotýká), síla stěny na míček je $y_i^* = 0$. Proto $y_i^*(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* - b_i) = 0$ (komplementarita)

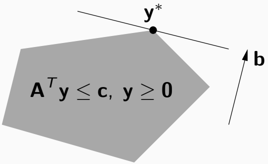
Duální proměnné a citlivost primární úlohy

Funkce f vyjadřuje závislost optimální hodnoty na pravé straně $\mathbf{b}$:

$$f(\mathbf{b}) := \min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ jediné optimální řešení $\mathbf{y}^*$. Pak je f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ diferencovatelná a $f'(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}$.



Příklad

$$
\begin{array}{rrrrl}
\min & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = 5.4 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 3 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq 1 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 3 \\
& -x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq -1 \\
& x_1 & \geq 0 \\
& x_2 & \geq 0 \\
& x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
\max & 3 \quad y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 & = 5.4 \\
0.2 = & y_1 & \geq 0 \\
0 = & y_2 & \geq 0 \\
1.6 = & y_3 & \geq 0 \\
0 = & y_4 & \geq 0 \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & \leq 2 \\
& y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq 5 \\
& 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3 \quad , \ 1, \ 3, \ -1)^T \ (0.2, \ 0, \ 1.6, \ 0) = 5.4$$

Příklad

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.402 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3.01 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\
& -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.402 \\
0.2 = \quad & y_1 \geq 0 \\
0 = \quad & y_2 \geq 0 \\
1.6 = \quad & y_3 \geq 0 \\
0 = \quad & y_4 \geq 0 \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\
& y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\
& 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6
\end{aligned}
$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* = (3.01,\ 1,\ 3,\ -1)^T\ (0.2,\ 0,\ 1.6,\ 0) = 5.402$$

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 14). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
- J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.