# Optimalizace

## Dualita v LP

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

# Duální úloha LP

**Primární úloha**

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

**Duální úloha**

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Duál duální úloha je primární úloha
- Duální úlohu lze definovat pro úlohu LP v libovolné formě

# Dvojice duálních úloh pro LP v obecném tvaru

$$
\begin{array}{rlrll}
\min & \sum_{j \in J} c_j x_j & \max & \sum_{i \in I} y_i b_i & \\
\text{za podm.} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i & \text{za podm.} & y_i \in \mathbb{R} & \forall i \in I_0 \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i & & y_i \geq 0 & \forall i \in I_+ \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i & & y_i \leq 0 & \forall i \in I_- \\
& x_j \in \mathbb{R} & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j & \forall j \in J_0 \\
& x_j \geq 0 & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j & \forall j \in J_+ \\
& x_j \leq 0 & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j & \forall j \in J_-
\end{array}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
I &= \{1, \dots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_- \\
J &= \{1 \dots, n\} \quad = J_0 \cup J_+ \cup J_-
\end{aligned}
$$

# Příklad

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 2x_1 & & & - & 3x_3 & + & x_4 & & \\
\text{z.p.} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & & & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_2 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & & & x_3 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x_4 & \leq & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & 6y_1 & + & 5y_2 & & & & \\
\text{z.p.} & & & & & y_1 & \in & \mathbb{R} \\
 & & & & & y_2 & \leq & 0 \\
 & & & & & y_3 & \geq & 0 \\
 & 2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & \leq & 2 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & = & 0 \\
 & y_1 & - & 3y_2 & - & y_3 & \leq & - \\
 & 2y_1 & & & - & 3y_3 & \geq & 1
\end{array}
$$

# Příklad

$$\begin{array}{rrcl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\ \text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & & \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} & \in & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \leq & \mathbf{c} \end{array}$$

# Slabá dualita

**Tvrzení**

Pro každé přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ a každé přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ platí:

1. $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$
2. Pokud $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$, potom jsou $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ optimální řešení

# Slabá dualita

**Tvrzení**

Pro každé přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ a každé přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ platí:

1. $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$
2. Pokud $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$, potom jsou $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ optimální řešení

- Duální LP zdola omezuje primární LP
- Pokud je mez těsná, nalezli jsme **optimum** obou úloh
- Silná dualita tvrdí i opak

# Podmínky komplementarity

- $I$ je indexová množina primárních omezení (duál. proměnných)
- $J$ je indexová množina duálních omezení (prim. proměnných)

**Věta**

Nechť $\mathbf{x}$ je přípustné primární řešení a $\mathbf{y}$ je přípustné duální řešení. Rovnost $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ platí právě tehdy, když platí tyto podmínky:

1. $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$ nebo $y_i = 0$ $\quad \forall i \in I$
2. $x_j = 0$ nebo $\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j$ $\quad \forall j \in J$

# Silná dualita

**Věta**

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Primární úloha má optimální řešení $\mathbf{x}^*$.
2. Duální úloha má optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pokud platí jedno z těchto tvrzení, pak $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$.

- Duální úloha nejen zdola omezuje primární úlohu, ale dokonce i nabývá hodnoty společného optima
- Nalezení společné hodnoty obou úloh LP tak poskytuje tzv. **certifikát optimality**

# Příklad

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\
& x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\
& -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \geq 0 \\
& y_3 \geq 0 \\
& y_4 \geq 0 \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\
& y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\
& 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6
\end{aligned}
$$

# Příklad

$$
\begin{array}{rrcrcrcl}
 & \min & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & \\
 & & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq 3 \\
 & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq 1 \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq 3 \\
 & & -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq -1 \\
\color{red}{1.2 =} & & x_1 & & & & & \geq 0 \\
\color{red}{0.6 =} & & & & x_2 & & & \geq 0 \\
\color{red}{0 =} & & & & & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
 & \max & 3y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & y_4 & \\
\color{red}{0.2 =} & & y_1 & & & & & & & \geq 0 \\
\color{red}{0 =} & & & & y_2 & & & & & \geq 0 \\
\color{red}{1.6 =} & & & & & & y_3 & & & \geq 0 \\
\color{red}{0 =} & & & & & & & & y_4 & \geq 0 \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & \leq 2 \\
 & & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & + & y_4 & \leq 5 \\
 & & 2y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & - & 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

# Příklad

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \min & 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 & = 5.4 \\
3 = & & 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 3 \\
2.4 = & & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq 1 \\
3 = & & x_1 + 3x_2 + x_3 & \geq 3 \\
-0.6 = & & -x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq -1 \\
1.2 = & & x_1 & \geq 0 \\
0.6 = & & x_2 & \geq 0 \\
0 = & & x_3 & \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
 & \max & 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 & = 5.4 \\
0.2 = & & y_1 & \geq 0 \\
0 = & & y_2 & \geq 0 \\
1.6 = & & y_3 & \geq 0 \\
0 = & & y_4 & \geq 0 \\
2 = & & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & \leq 2 \\
5 = & & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq 5 \\
3 = & & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

# Vlastnosti primáru a duálu – možnosti

| **P**/**D** | Má optimum | Neomezená | Nepřípustná |
|---|---|---|---|
| Má optimum | ✓ | ne | ne |
| Neomezená | ne | ne | ✓ |
| Nepřípustná | ne | ✓ | ✓ |

- Červeně zakázané kombinace plynou ze silné duality
- Zbylá plyne ze slabé duality
- Platí: **P** a **D** mají optimum $\Leftrightarrow$ **P** a **D** jsou přípustné

# Reference


T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 14). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.

J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.