Optimalizace

Simplexová metoda

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Co zatím víme o úloze LP?

- Každý lineární program lze převést do *rovnicového tvaru*

$$\min\{\,\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}$$

- Konvexní polyedr $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}$ neobsahuje přímku, proto má *extremální bod*
- Má-li lineární funkce polyedru minimum, leží v extremálním bodě

Naučíme se efektivně generovat extremální body.

Báze a bázová řešení

Předpokládáme, že na vstupu je konvexní polyedr

$$\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\},$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$.

- Báze je m-prvková množina $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé
- Bázové řešení příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x}$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Říkáme, že je
  - *přípustné*, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,
  - *degenerované*, pokud má vektor $\mathbf{x}$ méně než m nenulových složek.

Příklad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc c} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

-

Příklad

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)

Příklad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

- $\{1, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ je řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = x_3 = x_6 = 0.$$

Je přípustné, není degenerované.

Příklad

$$
\begin{array}{rl}
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array} \\
\mathbf{x} = & \begin{array}{rrrrrrr} 4 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 & \end{array}
\end{array}
$$

- $\{1, 2, 4\}$ je báze. Bázové řešení je nepřípustné, není degenerované.

Příklad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- $\{3, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení je nepřípustné a degenerované.

Příklad

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

- Stejné bázové řešení odpovídá bázi $\{3, 4, 6\}$.
  Degenerované bázové řešení odpovídá více než jedné bázi!

Báze a extremální body

Tvrzení

Pro $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní:

- Bod $\mathbf{x}$ je přípustné bázové řešení.
- Bod $\mathbf{x}$ je extremální.

Báze jsou sousední, pokud mají společných $m - 1$ prvků.

- Sousední báze odpovídají dvěma extremálním bodům spojených hranou anebo jedinému degenerovanému extremálnímu bodu
- Simplexová metoda přechází mezi sousedními bázemi, přičemž zachovává přípustnost řešení a účelová funkce neroste

Standardní báze

Simplexová metoda používá jen *standardní báze*:

- Nenulové složky bázového řešení $\mathbf{x}$ jsou jednoduše složky $\mathbf{b}$
- Tedy bázové řešení $\mathbf{x}$ je přípustné, právě když $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

Standardní báze

Simplexová metoda používá jen *standardní báze*:

- Nenulové složky bázového řešení $\mathbf{x}$ jsou jednoduše složky $\mathbf{b}$
- Tedy bázové řešení $\mathbf{x}$ je přípustné, právě když $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} & = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} & = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Bázové řešení příslušné standardní bázi $\{1, 4, 5\}$ je řešením soustavy

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = x_3 = x_6 = 0
$$

Stavební kameny algoritmu

Přechod k sousední standardní bázi

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- Pivot je prvek (i, j), kde i je řádek splňující $a_{ij'} = 1$
- Proveď *ekvivalentní úpravu kolem pivotu* (i, j), tj.
  nastav $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro každé $i' \neq i$:

Přechod k sousední standardní bázi

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- Pivot je prvek (i, j), kde i je řádek splňující $a_{ij'} = 1$
- Proveď *ekvivalentní úpravu kolem pivotu* (i, j), tj.
  nastav $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro každé $i' \neq i$:

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Přechod k sousední standardní bázi

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- Pivot je prvek (i, j), kde i je řádek splňující $a_{ij'} = 1$
- Proveď *ekvivalentní úpravu kolem pivotu* (i, j), tj. nastav $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro každé $i' \neq i$:
  1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}$$

Přechod k sousední standardní bázi

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- Pivot je prvek (i, j), kde i je řádek splňující $a_{ij'} = 1$
- Proveď *ekvivalentní úpravu kolem pivotu* (i, j), tj.
  nastav $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro každé $i' \neq i$:
  1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.
  2. Pro každé $i' \neq i$ odečti $a_{i'j}$-násobek řádku i od řádku i'.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Přechod k sousední standardní bázi

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$:

- Pivot je prvek (i, j), kde i je řádek splňující $a_{ij'} = 1$
- Proveď *ekvivalentní úpravu kolem pivotu* (i, j), tj.
  nastav $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro každé $i' \neq i$:
  1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.
  2. Pro každé $i' \neq i$ odečti $a_{i'j}$-násobek řádku i od řádku i'.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & \color{red}{0} & 8 & 1 & 2 & 8 & 6 \\
 & 1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Jak se změní **b** po ekvivalentní úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} \dfrac{b_i}{a_{ij}}$

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když

$$a_{ij} > 0 \quad \text{a} \quad \forall i' \neq i \text{ platí } a_{i'j} \leq 0 \text{ nebo } \frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & \quad 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & \quad 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \quad 1
\end{array}$$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Jak se změní **b** po ekvivalentní úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} \dfrac{b_i}{a_{ij}}$

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když

$$a_{ij} > 0 \quad \text{a} \quad \forall i' \neq i \text{ platí } a_{i'j} \leq 0 \text{ nebo } \frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

$$\begin{array}{cccccc c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- Po úpravě kolem $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not\geq 0$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Jak se změní **b** po ekvivalentní úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} \dfrac{b_i}{a_{ij}}$

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když

$$a_{ij} > 0 \quad \text{a} \quad \forall i' \neq i \text{ platí } a_{i'j} \leq 0 \text{ nebo } \frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- Po úpravě kolem $(2, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Jak se změní **b** po ekvivalentní úpravě kolem pivotu (i, j)?

- b_i se změní na b_i / a_{ij}
- Pro každé $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j} \dfrac{b_i}{a_{ij}}$

Tato čísla musejí zůstat nezáporná, což nastane právě když

$$a_{ij} > 0 \quad \text{a} \quad \forall i' \neq i \text{ platí } a_{i'j} \leq 0 \text{ nebo } \frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1
\end{array}$$

- Po úpravě kolem $(3, 6)$ bude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $2 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{4}$

Nekladný sloupec

Když jsou všechny prvky v nebázovém sloupci $j \notin J$ nekladné:

- Sloupec j se nemůže stát bázovým (nelze v něm vybrat pivot)
- Existuje směr $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$ pro každé $\alpha \geq 0$

$$
\begin{array}{rcccccc c}
 & 0 & -2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & \\
\mathbf{v} = & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Vektor $\mathbf{v}$ je řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Av} &= \mathbf{0} \\
v_j &= 1 \\
v_{j'} &= 0 \qquad \forall j' \notin J,\ j' \neq j
\end{aligned}
$$

Ekvivalentní úpravy účelového řádku

Lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

reprezentujeme simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Přičti k prvnímu řádku tabulky lineární kombinaci ostatních řádků:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}'^T & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} + \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A} & d + \mathbf{y}^T\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Účelová funkce se tím nezmění:

$$\mathbf{c}'^T\mathbf{x} - d' = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{rccccccc}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{r|rrrrrr|r}
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = & 0 & -3 & -6 & -1 & 2 & -1 & 1 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{r cccccc c}
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{rcccccccc}
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & & 3 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{r cccccc c}
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} = & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ a tedy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.
- Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce $j \notin J$ do báze:
  - když $c_j > 0$, účelová hodnota by stoupla
  - když $c_j < 0$, účelová hodnota by klesla

  (*předpoklad*: nové bázové řešení nebude degenerované, tj. $x_j > 0$).
- Pokud v některém sloupci j je $c_j < 0$ a $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i, účelovou funkci lze libovolně zmenšovat $\Rightarrow$ úloha je neomezená.

Základní algoritmus

Tvar simplexové tabulky

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců **A** tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & {\color{red}2} & 1 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.
    - nastav pivot na jedničku

Iterace simplexového algoritmu

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & {\color{red}1} & 0.5
\end{array}\right]
$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$
i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}
$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.
   - nastav pivot na jedničku
   - vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.
   - nastav pivot na jedničku
   - vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

Iterace simplexového algoritmu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.
   - nastav pivot na jedničku
   - vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

Iterace simplexového algoritmu

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -3.5 & 2.5 & 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ \hline
0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\
0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5
\end{array}\right]
$$

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné:

$$
i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}
$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j, tj.
    - nastav pivot na jedničku
    - vynuluj prvky nad a pod pivotem (vč. účelového řádku)

Ukončení algoritmu

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny ceny c_j jsou nezáporné (jsme v optimu).

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 1 & 3 & 0.5 & 0 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 0.5 & 1 & 4 & 3
\end{array}
$$

Ukončení algoritmu

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny ceny c_j jsou nezáporné (jsme v optimu).

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 1 & 3 & 0.5 & 0 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & 0.5 & 1 & 4 & 3
\end{array}
$$

- V každém sloupci j, ve kterém $c_j < 0$, je $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i (úloha je neomezená).

$$
\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 7 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 1 & 3 & -0.5 & 0 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 4 & -0.5 & 1 & 4 & 3
\end{array}
$$

Cyklení

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli *cyklení*.

-2.3	-2.15	13.55	0.4	0	0	0
0.4	0.2	-1.4	-0.2	1	0	0
-7.8	-1.4	7.8	0.4	0	1	0

Cyklení

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli *cyklení*.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & -1 & 5.5 & -0.75 & 5.75 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0.5 & -3.5 & -0.5 & 2.5 & 0 & 0 \\
0 & 2.5 & -19.5 & -3.5 & 19.5 & 1 & 0
\end{array}
$$

Cyklení

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli *cyklení*.

0	0	−2.3	−2.15	13.55	0.4	0
1	0	0.4	0.2	−1.4	−0.2	0
0	1	−7.8	−1.4	7.8	0.4	0

Tohle je počáteční tabulka se sloupci rotovanými o dva doprava.

Další 4 iterace dospějí do počáteční tabulky!

Cyklení

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli *cyklení*.

0	0	−2.3	−2.15	13.55	0.4	0
1	0	0.4	0.2	−1.4	−0.2	0
0	1	−7.8	−1.4	7.8	0.4	0

Tohle je počáteční tabulka se sloupci rotovanými o dva doprava.
Další 4 iterace dospějí do počáteční tabulky!

Blandovo anticyklící pravidlo:

- Při výběru pivotového sloupce vyber sloupec s nejnižším indexem
- Při výběru pivotového řádku vždy vyber řádek s nejnižším indexem

Inicializace algoritmu – speciální případ

Pro zahájení simplexového algoritmu musíme úlohu převést na tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}$$

kde podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi a $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

- Někdy je to snadné. Např. když má vstupní úloha tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}, \qquad \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

- Přidáním slackových proměnných $\mathbf{u}$ ji převedeme na úlohu

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0}\,\}$$

  se simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

  ve které sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ tvoří standardní bázi $\mathbf{I}$

Inicializace algoritmu – obecný případ

- Vstupní lineární program lze vždy efektivně převést na tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

  kde $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- Ale **A** nemusí obsahovat standardní bázi!

Dvoufázová simplexová metoda

Dvoufázová simplexová metoda

Vyřeš pomocnou úlohu

$$\min\{\, \mathbf{1}^T \mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \,\} \tag{1}$$

se simplexovou tabulkou $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}^T & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

- Vstupní úloha nepřípustná $\Leftrightarrow$ (1) má kladnou optimální hodnotu
- Vstupní úloha je **přípustná** $\Leftrightarrow$ (1) má nulovou optimální hodnotu
  - Je-li opt. řešení $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ úlohy (1) **nedegenerované**, pak všechny sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ jsou nebázové, proto matice $\mathbf{A}$ obsahuje standardní bázi.
  - Je-li je opt. řešení $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ úlohy (1) **degenerované**, některé sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ mohou být bázové.
    Dalším pivotováním je možno bázi z těchto sloupců 'vyhnat'.

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 13). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.