

# Optimalizace

Konvexní množiny a konvexní polyedry

---

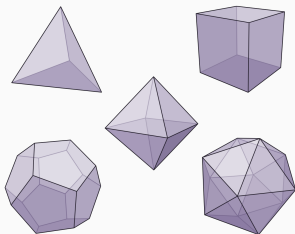
Tomáš Kroupa   Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická  
ČVUT v Praze

# Jak vypadá množina přípustných řešení v úloze LP?

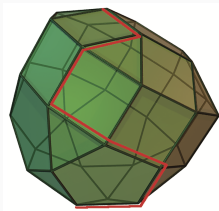
Minimalizuj  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$   
za podmínek  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$



# Jak nalézt řešení úlohy LP?

Ukážeme si, že:

- Pokud minimum existuje, nachází se ve *vrcholu* polyedru
- **Simplexová metoda** umí procházet všechny vrcholy



# Konvexní množiny

## Definice

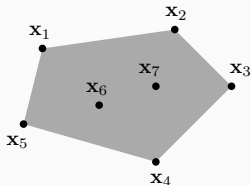
Množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je **konvexní**, pokud pro libovolné body  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$  a každé  $\alpha \in [0, 1]$  platí  $(1 - \alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X$ .



- **Konvexní kombinace** je lineární kombinace  $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k\mathbf{x}_k$ , kde  $\alpha_i \geq 0$  a  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$
- Množina je konvexní právě tehdy, když je uzavřená na konvexní kombinace

# Operace s konvexními množinami

- *Průnik* libovolně mnoha konvexních množin je konvexní
- *Sjednocení* dvou konvexních množin nemusí být konvexní
- *Konvexní obal* libovolné množiny vektorů je průnik všech konvexních množin, které tu množinu obsahují



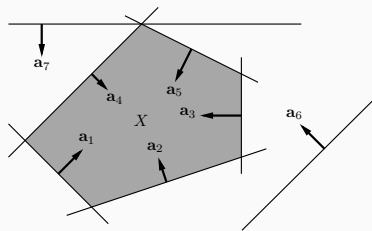
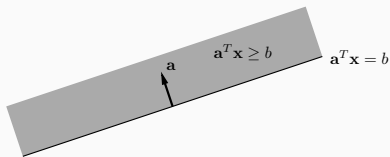
# Konvexní polyedry

## Definice

- Množina  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b\}$  je **uzavřený poloprostor**
- **Konvexní polyedr** je průnik konečně mnoha poloprostorů:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

*Dimenze* konvexního polyedru je dimenze jeho afinního obalu.



## Příklady konvexních polyedrů

- Nadrovina  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ , kde  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
- Afinní podprostor  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- Hyperkrychle  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$
- Standardní simplex  $\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$
- Platónská tělesa

## Definice

Nechť  $X$  je konvexní množina. Bod  $\mathbf{x} \in X$  je **extremální**, pokud

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

- Konvexní množina nemusí mít extrémální bod
- Některé konvexní množiny jsou plně určeny extrémálními body
- Extrémální body polyedru mají výpočetně efektivní popis



# Extremální body polyedru

- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ , kde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Pro neprázdnou množinu řádkových indexů  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  uvažujeme matici  $\mathbf{A}_I$  a vektor  $\mathbf{b}_I$

## Věta

Nechť  $\mathbf{x} \in X$ . Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Bod  $\mathbf{x}$  je extrémální.
2. Existuje neprázdná  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  tak, že platí  $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$  a matice  $\mathbf{A}_I$  má lineárně nezávislé sloupce.

# Jak procházet extrémální body polyedru?

Na základě předchozí věty se nabízí tento přímočarý postup:

## Algoritmus

- Vygeneruj neprázdnou množinu  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$
- Vyřeš soustavu  $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$
- Existuje-li jediné řešení  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ , pak je  $\mathbf{x}$  extrémální bod

## Problém

Počet extrémálních bodů některých polyedrů je exponenciální v  $m$ .

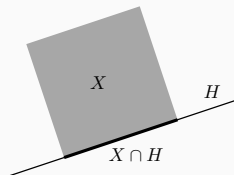
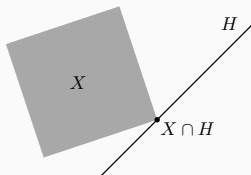
# Konvexní množina se opírá o nadrovinu

## Definice

**Opěrná nadrovinu** konvexní množiny  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je nadrovinu

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$$

taková, že  $X \cap H \neq \emptyset$  a platí  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$  pro všechna  $\mathbf{x} \in X$ .



## Definice

**Stěna** polyedru  $X$  je množina  $X \cap H$ , kde  $H$  je nějaká opěrná nadrovina polyedru  $X$ .

Podle dimenze rozlišujeme tyto stěny:

- **Vrchol** (0)
- **Hrana** (1)
- **Faseta** ( $\dim X - 1$ )

Bod  $\mathbf{x} \in X$  je vrchol, právě když je to extrémální bod.

# Které polyedry mají extrémální bod?

## Věta

Nechť  $X \neq \emptyset$  je konvexní polyedr. Tato tvrzení jsou ekvivalentní.

1. Polyedr  $X$  má alespoň jeden extrémální bod.
2. Polyedr  $X$  neobsahuje přímku.

## Příklady

- omezený konvexní polyedr
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

## Kde nabývá lineární funkce na polyedru minima?

### Věta

Nechť  $X$  je konvexní polyedr neobsahující přímku a lineární funkce  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  má na  $X$  minimum. Potom existuje extrémální bod, v němž  $f$  nabývá minima.

- Označme  $\mathbf{x}^* \in X$  bod minima
- Pak  $H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^*\}$  je opěrná nadrovina polyedru  $X$  v bodě  $\mathbf{x}^*$
- Tudíž  $f$  nabývá minima na celé stěně  $X \cap H$
- $X \cap H$  neobsahuje přímku, tedy má extrémální bod

## Co z toho plyne pro řešení úlohy LP?





Úlohu LP

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \underbrace{\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}}_X\}$$

nyní umíme vyřešit, pokud

- polyedr  $X$  neobsahuje přímku
- funkce  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$  má na  $X$  minimum
- umíme **efektivně** procházet extrémální body polyedru  $X$

**Simplexová metoda** řeší úlohu LP v plné obecnosti.

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 12). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
-  J.A. de Loera. Algebraic and Topological Tools in Linear Optimization. *Notices of the AMS* 66:7, 2019.
-  J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.
-  [https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid)