Optimalizace

4. Ortogonální projekce

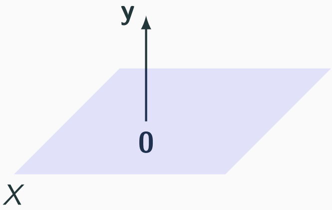
Tomáš Kroupa Tomáš Werner

2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

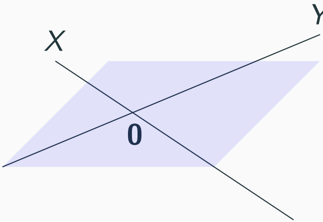
Ortogonalita podprostorů

Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ je ortogonální na podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$, je-li $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in X$. Píšeme $\mathbf{y} \perp X$.



Ortogonální podprostory

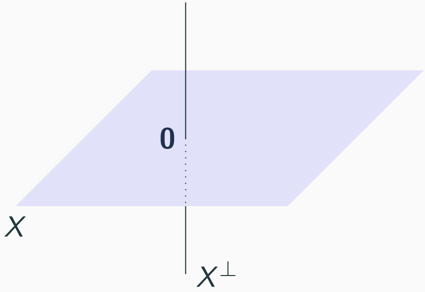
$X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ splňují $\mathbf{y} \perp X$ pro všechna $\mathbf{y} \in Y$. Píšeme $X \perp Y$.



Ortogonální doplněk

Ortogonální doplněk podprostoru $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je množina

$$X^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{y} \perp X\}.$$



Pozorování

$X^\perp$ je lineární podprostor $\mathbb{R}^m$ a platí $X \cap X^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Ortogonální doplňky fundamentálních podprostorů matice

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A}$ platí:

$$(\operatorname{rng}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{null}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$
$$(\operatorname{null}\mathbf{A})^{\perp} = \operatorname{rng}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

Fredholmova alternativa pro řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

- *Buď* má soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ řešení
- *nebo* existuje řešení $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ soustavy $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ takové, že $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{b}$

Příklad

Soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení

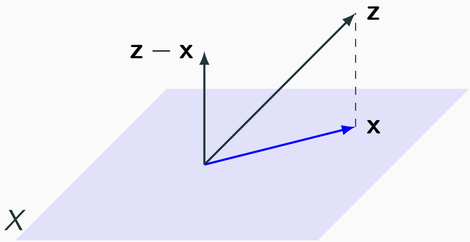
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pro $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ platí $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{x} \not\perp \mathbf{b}$.

Ortogonální projekce na podprostor

Definice

Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ je vektor $\mathbf{x} \in X$ takový, že $(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \perp X$.



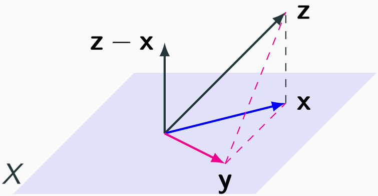
Vektor $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ se nazývá *kolmice* nebo také *chybový vektor*.

Vzdálenost bodu od podprostoru

Věta o kolmici

Ortogonální projekce $\mathbf{x} \in X$ vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na lineární podprostor $X \subseteq \mathbb{R}^m$ minimalizuje vzdálenost od $\mathbf{z}$:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \qquad \forall \mathbf{y} \in X, \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{x}$$



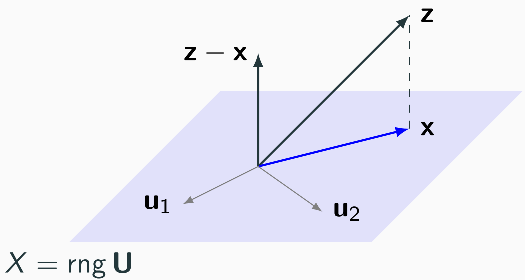
Tedy $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$ je *vzdálenost bodu* $\mathbf{z}$ *od podprostoru* X.

Ortogonální projekce na podprostor s ortonormální bází

Věta

Nechť má matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ortonormální sloupce $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $X := \operatorname{rng} \mathbf{U}$. Ortogonální projekce $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na X je vektor

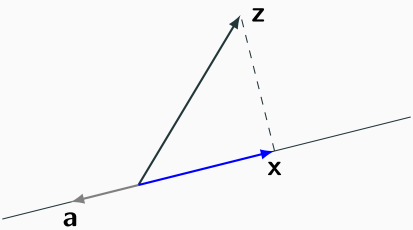
$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{z})\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{u}_n^\mathsf{T}\mathbf{z})\mathbf{u}_n$$



Ortogonální projekce na přímku

Ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ na přímku procházející počátkem se směrovým vektorem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ je vektor

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$



Délka průmětu $\mathbf{x}$ je $\|\mathbf{x}\| = \frac{|\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{z}|}{\|\mathbf{a}\|}$.

Vlastnosti ortogonálního projektoru

Ortogonální projektor je matice $\mathbf{P} := \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$, kde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonormální sloupce a $X := \operatorname{rng} \mathbf{U}$.

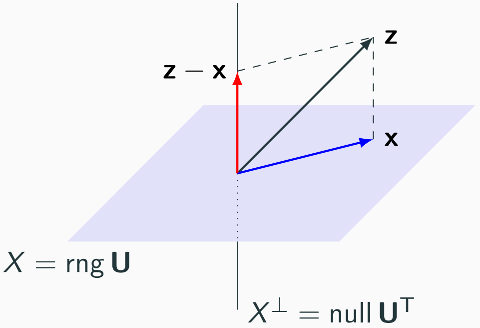
Vlastnosti

1. $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$
2. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$
3. $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$
4. $X = \operatorname{rng} \mathbf{P}$ a $X^\perp = \operatorname{null} \mathbf{P}$

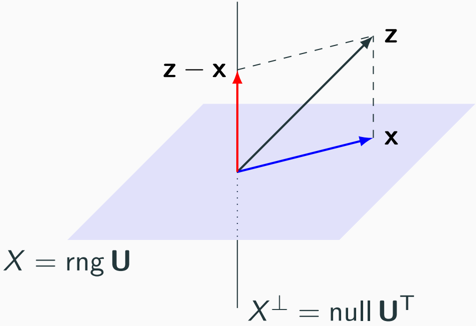
Ortogonální projekce na ortogonální doplněk

Tvrzení

1. Kolmice $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{z}$ na $X^\perp$
2. Matice $\mathbf{I} - \mathbf{U}\mathbf{U}^\mathsf{T}$ je ortogonální projektor na $X^\perp$
3. Vzdálenost bodu $\mathbf{z}$ od podprostoru $X^\perp$ je $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{z}\|$



Prostor $\mathbb{R}^m$ jako direktní součet X a $X^\perp$

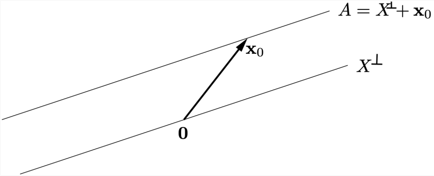


Tvrzení

$$X \cap X^\perp = \{\mathbf{0}\} \quad \text{a} \quad X + X^\perp = \mathbb{R}^m$$

Vzdálenost bodu od afinního podprostoru

Pro vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ a afinní podprostor $A \subseteq \mathbb{R}^m$ hledáme minimum funkce $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|$ za podmínky $\mathbf{x} \in A$.



Jak na to?

1. $A = X^\perp + \mathbf{x}_0 = \operatorname{null} \mathbf{U}^\mathsf{T} + \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, \quad \mathbf{b} := \mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{x}_0$, pro nějakou matici $\mathbf{U}$ s ortonormálními sloupci
2. Platí $d(\mathbf{z}, A) = d(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0, X^\perp)$
3. $d(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0, X^\perp) = \|\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{z} - \mathbf{b}\|$

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 4). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.