Optimalizace

2. Lineární prostory a afinní podprostory

Tomáš Kroupa Tomáš Werner

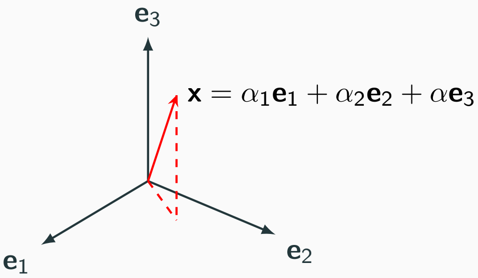
2021 LS

Fakulta elektrotechnická
ČVUT v Praze

Lineární prostory, matice a soustavy

Lineární prostor

- Lineární prostor $\mathbb{R}^n$ a lineární podprostory $X \subseteq \mathbb{R}^n$
- Vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
- Standardní báze prostoru $\mathbb{R}^n$ je $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$

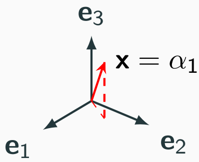


Lineární zobrazení

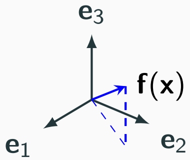
- Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Lineární zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ má podobu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (v závislosti na volbě báze!)

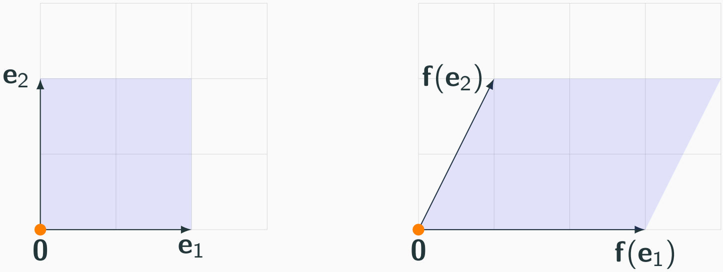


$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha \mathbf{e}_3$$



$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 \mathbf{f}(\mathbf{e}_2) + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{e}_3)$$

Lineární zobrazení – příklad $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Sloupcový a řádkový pohled na součin Ax

Vyjádříme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ prostřednictvím sloupců $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^{m \times 1}$:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Vyjádříme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ prostřednictvím řádků $\mathbf{a}_1^\mathsf{T}, \ldots, \mathbf{a}_m^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^\mathsf{T}\mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ geometricky

Sloupcově

Hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

Řádkově

Hledáme vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ležící v průniku

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^\mathsf{T} \mathbf{x} = b_i\}$$

Prostor obrazů matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\operatorname{rng} \mathbf{A} := \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad \subseteq \mathbb{R}^m$$

Interpretace

- Obor hodnot (range, image) lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Množina všech vektorů $\mathbf{y}$ takových, že $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ má řešení
- Lineární obal sloupců matice $\mathbf{A}$

Hodnost matice $\mathbf{A}$ je číslo

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} := \dim \operatorname{rng} \mathbf{A}.$$

Nulový prostor matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\operatorname{null} \mathbf{A} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \quad \subseteq \mathbb{R}^n$$

Interpretace

- Množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor
- Množina řešení soustavy lineárních rovnic $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Množina všech vektorů $\mathbf{x}$ kolmých na každý řádek matice $\mathbf{A}$

Jaký je vztah mezi $\operatorname{rng} \mathbf{A}$ a $\operatorname{null} \mathbf{A}$?

Existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních rovnic

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jsou tvrzení pod sebou ekvivalentní:

Prostor obrazů

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ má řešení $\forall \mathbf{y}$
2. $\operatorname{rng} \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
3. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = m$
4. $\mathbf{A}$ má LN řádky
5. $\mathbf{A}$ má pravou inverzi
6. $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ je regulární

Nulový prostor

1. $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ řeší jen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
2. $\operatorname{null} \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
3. $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$
4. $\mathbf{A}$ má LN sloupce
5. $\mathbf{A}$ má levou inverzi
6. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ je regulární

Dimenze fundamentálních podprostorů matice

Věta

Pro každou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ platí

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} + \dim \operatorname{null} \mathbf{A} = n$$

Interpretace

- Čím větší je $\operatorname{rank} \mathbf{A}$, tím menší je míra degenerace lineárního zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Číslo $n - \operatorname{rank} \mathbf{A}$ je počet LN řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Afinní podprostory

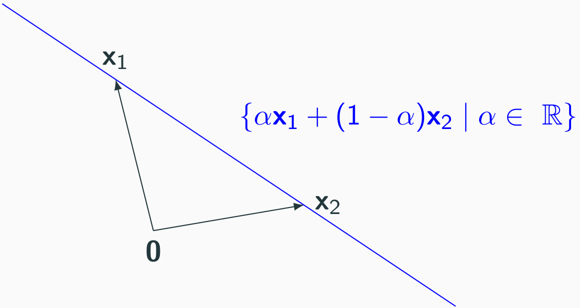
Afinní kombinace

Afinní kombinace vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je lineární kombinace

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k, \qquad \text{kde } \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1.$$

Afinní obal vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina

$$\{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}.$$



Afinní podprostor

Definice

Afinní podprostor je množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ splňující

$$\left[\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in A,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1\right] \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{x}_i \in A.$$

- Bod, přímka, rovina, nadrovina v $\mathbb{R}^n$
- Je-li X lineární podprostor $\mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pak je množina

$$X + \mathbf{x}_0 := \{\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x} \in X\}$$

afinní podprostor $\mathbb{R}^n$

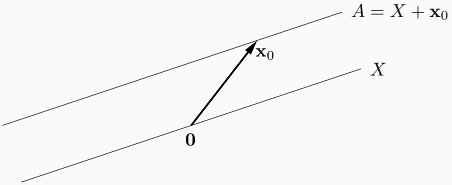
Afinní podprostor je posunutý lineární podprostor

Věta

Pro každý afinní podprostor $A \neq \emptyset$ existuje jediný lineární podprostor X a nějaký vektor $\mathbf{x}_0 \in A$ splňující

$$A = X + \mathbf{x}_0$$

Dimenze afinního podprostoru A je $\dim X$.



Tvrzení

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

1. A je afinní podprostor.
2. Existuje matice $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$ tak, že

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Afinní zobrazení

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je afinní, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

platí pro všechna $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$.

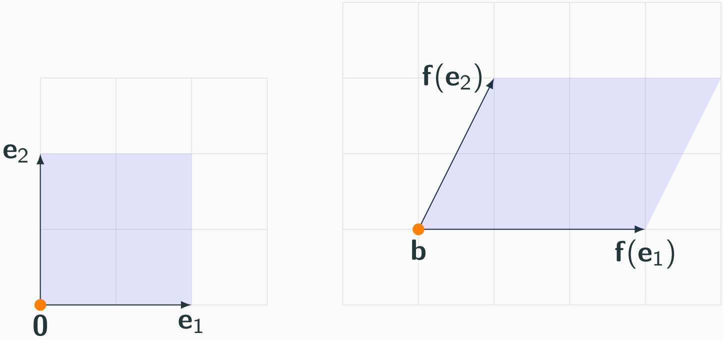
Tvrzení

Nechť $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Následující výroky jsou ekvivalentní.

1. Zobrazení $\mathbf{f}$ je afinní.
2. Existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tak, že

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

Afinní zobrazení – příklad $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Analogie

Lineární	**Afinní**
lineární kombinace	afinní kombinace
lineární obal	afinní obal
lineární podprostor X	afinní podprostor $X + \mathbf{x}_0$
řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$	řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$
$\operatorname{null} \mathbf{A}$	$\mathbf{x}_0 + \operatorname{null} \mathbf{A}$
lineární zobrazení $\mathbf{A}\mathbf{x}$	afinní zobrazení $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitoly 2 a 3). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.