

Červenočerný strom má specifické vlastnosti, citujeme:

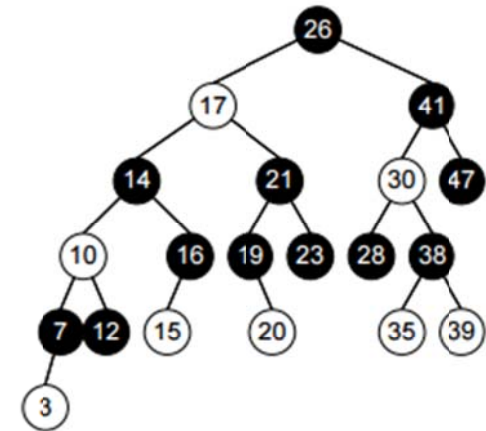
1. *Every node is either red or black.*
2. *Every leaf (nil) is black.*
3. *If a node is red, then both its children are black.*
4. *Every simple path from a node to a descendant leaf contains the same number of black nodes.*
5. *Root is black.*

(Black-height  $bh(x)$  of a node  $x$  is the number of black nodes on any path from  $x$  to a leaf, not counting  $x$ .)

1. Je dán R-B strom na obrázku. (Světle podbarvené uzly pokládáme za červené.)  
Prázdné (nil) listy nejsou zobrazeny, připomínáme ale, že mají význam pro obarvení stromu.

Černá výška kořene znázorněného stromu je

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6 nebo více

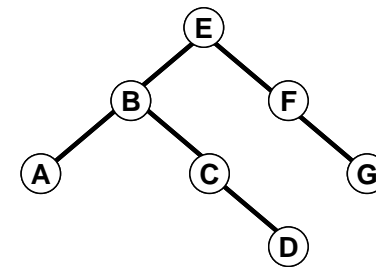


[<https://cs.stackexchange.com/questions/65693/binary-tree-to-red-black-tree>]

2A. Navrhněte červenočerné obarvení daného stromu tak, aby vznikl korektní červenočerný strom. Prázdné (nil) listy nejsou zobrazeny, připomínáme ale, že mají význam pro obarvení stromu.

Červené (red) uzly budou:

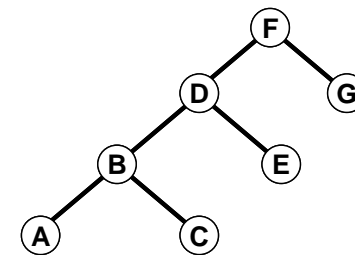
- A. A C G
- B. B D G
- C. B F
- D. C F
- E. Jiné



2B. Navrhněte červenočerné obarvení daného stromu tak, aby vznikl korektní červenočerný strom. Prázdné (nil) listy nejsou zobrazeny, připomínáme ale, že mají význam pro obarvení stromu.

Červené (red) uzly budou:

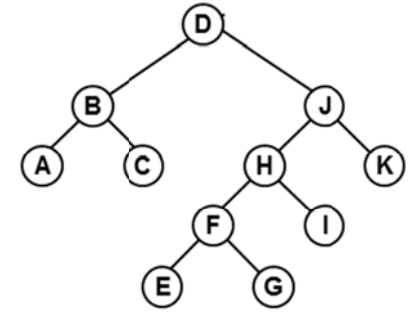
- A. A C D
- B. B
- C. B E
- D. C E G
- E. Jiné



2C. Navrhňte červenočerné obarvení daného stromu tak, aby vznikl korektní červenočerný strom. Prázdné (nil) listy nejsou zobrazeny, připomínáme ale, že mají význam pro obarvení stromu.

Počet červených uzlů bude:

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6 nebo více



3. V R-B stromu platí invarianty:

3. *Je-li uzel červený, jeho oba potomky jsou černé.*

5. *Kořen je černý.*

Docent Odlišný používá poněkud jinou formulaci:

3. *Je-li uzel červený, jeho rodič je černý.*

5. *Kořen je černý.*

Jsou obě formulace ekvivalentní?

A. Ano, dokonce to mohu dokázat.

B. Nejspíše ano, na pohled to tak vypadá.

C. Spíše ne, formulace vypadají příliš různé.

D. Ne, a dokonce to mohu dokázat.

E. Máme příliš málo informace na to, abychom mohli rozhodovat o ekvivalenci.

4. R-B strom obsahuje 15 klíčů, jeho černá výška (= černá výška kořene) je 2, tj. obsahuje 10 červených uzlů.

Tyto červené uzly jsou v obyčejné hloubce (hloubka kořene je 0)

- A. 1 a 3
- B. 2 a 4
- C. pouze 3
- D. pouze 4
- E. V každé kladné hloubce může být nějaký červený uzel.

5A. R-B strom má černou výšku kořene rovnou 11.

Určete, jaký je v tomto stromu maximální možný počet černých uzlů .

Nil uzly do počtu nezahrnujeme.

A.  $(4^{11} - 1)/3 = 1\,398\,101$

B.  $4^{11} - 1 = 4\,194\,303$

C.  $(4^{12} - 1)/3 = 5\,592\,405$

D.  $4^{12} - 1 = 16\,777\,215$

E. Jiný počet

5B. R-B strom má černou výšku kořene rovnou 11.

Určete, jaký je v tomto stromu maximální možný počet červených uzlů

A.  $2 \times (4^{11} - 1)/3 = 2\,796\,202$

B.  $2 \times (4^{11} - 1) = 8\,388\,606$

C.  $2 \times (4^{12} - 1)/3 = 11\,184\,810$

D.  $2 \times (4^{12} - 1) = 33\,554\,430$

E. Jiný počet



5C. R-B strom má černou výšku kořene rovnou 11.

Určete, jaký je v tomto stromu maximální možný počet všech uzlů

Nil uzly do počtu nezahrnujeme.

A.  $(4^{11} - 1) = 4\,194\,303$

B.  $3 \times (4^{11} - 1) = 12\,582\,909$

C.  $(4^{12} - 1) = 16\,777\,215$

D.  $3 \times (4^{12} - 1) = 50\,331\,645$

E. Jiný počet

6. Najděte příklad regulárního (každý vnitřní uzel má dva potomky) binárního stromu který nelze obarvit podle pravidel R-B stromu. Nil-uzly nebudeme uvažovat za součást tohoto stromu.

Minimální hloubka takového stromu je

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6 nebo více

7. Do prázdného splay stromu vložte postupně klíče 2, 7, 1, 4.

V strom pak bude mít jeden nebo dva listy a v nich budou klíče

- A. 1
- B. 1, 2
- C. 1, 7
- D. 2, 7
- E. 7

8. Do prázdného splay stromu vložte postupně klíče 2, 7, 1, 4, tím vznikne strom z předchozí úlohy. Dále vložte klíče 3, 9,

V strom pak bude mít dva nebo tři listy a v nich budou klíče

- A. 1 2
- B. 1 4
- C. 1 4 7
- D. 2 3 7
- E. 4 7

9. Do prázdného splay stromu vložte postupně klíče 2, 7, 1, 4, 3, 9, tím vznikne strom z předchozí úlohy. Dále vložte klíče 5, 6.

Hloubka výsledného stromu bude (kořen má hloubku 0)

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6 nebo více

**10A.** Splay strom byl původně prázdný, pak do něj byly vloženy klíče 1, 2, 3, ..., 10 v tomto pořadí. Poté byl odstraněn klíč 1. Předpokládejte, že při mazání je použita funkce findMaxKey aplikovaná na levý podstrom kořene a že tato funkce také přesouvá nalezený maximální prvek do kořene stromu, na nějž byla aplikována.

- A. Hloubka stromu výsledného stromu je
- B. 4 nebo méně
- C. 5
- D. 6
- E. 7
- F. 8 nebo více

**10B.** Splay strom byl původně prázdný, pak do něj byly vloženy klíče 1, 2, 3, ..., 10 v tomto pořadí. Poté byl odstraněn klíč 1 (předchozí úloha), a pak klíč 2. Předpokládejte, že při mazání je použita funkce `findMaxKey` aplikovaná na levý podstrom kořene a že tato funkce také přesouvá nalezený maximální prvek do kořene stromu, na nějž byla aplikována.

Hloubka stromu výsledného stromu je

- A. 4 nebo méně
- B. 5
- C. 6
- D. 7
- E. 8 nebo více

**10C.** Splay strom byl původně prázdný, pak do něj byly vloženy klíče 1, 2, 3, ..., 10 v tomto pořadí. Poté byl odstraněn klíč 1, 2 (předchozí úloha) a 3 v tomto pořadí. Nakreslete výsledný strom. Předpokládejte, že při mazání je použita funkce findMaxKey aplikovaná na levý podstrom kořene a že tato funkce také přesouvá nalezený maximální prvek do kořene stromu, na nějž byla aplikována.

Hloubka stromu výsledného stromu je

- A. 2 nebo méně
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6 nebo více



**11.** Splay strom obsahuje  $N$  klíčů, dva z nich jsou  $x$  a  $y$  (navzájem různé). Se stromem byla provedena posloupnost operací  $(\text{Find}(x), \text{Find}(y), \text{Find}(x), \text{Find}(y), \dots, \text{Find}(x), \text{Find}(y))$ , jichž bylo celkem  $2N$ . Jaký byl průměrný počet navštívených uzlů během jedné operace  $\text{Find}$ ? Určete co nejpřesnější dolní a horní odhad tohoto průměru.

**12.** Splay tree obsahuje  $2^n - 1$  klíčů s hodnotou  $1, 2, 3, \dots, 2^n - 1$  a je ideálně vyvážený, to jest má hloubku  $n-1$ . Po vyhledání uzlu s klíčem 1 se tento uzel stane kořenem stromu. Jakou hloubku bude mít výsledný strom? Řešte zvlášť pro sudé a liché  $n$ .

13. RB-strom obsahuje 15 klíčů, jeho černá hloubka (= černá výška kořene) je 2, tj. obsahuje 10 červených uzlů.

Hodnoty klíčů jsou 1, 2, 3, ..., 7, 8, 21, 22, ..., 26, 27.

Do stromu postupně vložíme další klíče s hodnotou 11, 12, 13.

Nakreslete původní strom a dále strom po každém vložení.