0. Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

Kořen = Vstupní stupeň 0 (žádná hrana do něj nevede)
List = Výstupní stupeň 0 (žádná hrana z něj nevede)

Příklad, ukázka:

1. Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

A. Kořenů je vždy víc.
B. Listů je vždy víc.
C. Kořenů i listů je vždy stejně.
D. Mám příklad, kde záleží na orientaci.
E. Přibližně odhaduji, že asi záleží na orientaci.

2. Orientujte kružnici se 7 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?

2a. Když v kružnici není ani jeden kořen ani jeden list, je počet způsobů

A. 0. (plyne přímo ze zadání!)
B. 1.
C. 2.
D. 7.
E. 14.
F. 7! (faktoriál)

2b. Když v kružnici je jeden kořen a jeden list, je počet způsobů

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 6.
E. 7.
F. 14

2c. Když v kružnici jsou dva kořeny a dva listy, je počet způsobů

A. 2.
B. 4.
C. 5.
D. 6.
E. 7.
F. 8.

2d. Když v kružnici jsou tři kořeny a tři listy, je počet způsobů dán tím, že zbývající jeden ("průchozí") uzel může být sice kdekoli v kružnici, ale konfigurace lisů a kořenů okolo něj už je zcela fixní.
Zde to tedy vypadá jen na jednu možnost?

A. Ano.
B. Ne.
C. Potřebuju další ukázku, aby to bylo jasné.

2e. Celkem vyšlo způsobů

A. Méně než 9
B. Přesně 9.
C. Více než 9.
D. Výpočet nebyl moc jasný :-(

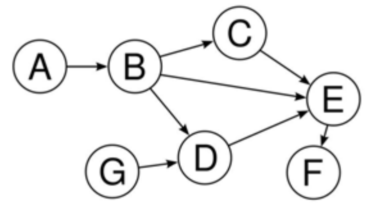
3. Najděte orientovaný graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

Bude na řešení stačit 5 uzlů a dva cykly?

A. Ano, mám to.
B. Ne, tak málo uzlů evidentně nestačí.
C. Mám příklad s větším počtem uzlů, nevím jak na 5 uzlů.
D. Nejde to pro žádný počet uzlů.
E. Potřebuju víc nápovědy.

4. V acyklickém orientovaném grafu najdeme libovolný jeho kořen a z grafu ho odstraníme i s hranami s ním incidujícími. Na zmenšený graf rekurzivně opakujeme stejný postup, dokud nezískáme prázdný graf. Rozhodněte, jestli pořadí uzlů, v němž byly postupně odstraňovány z grafu, definuje topologické uspořádání původního grafu.

4A Použijte jako příklad graf vpravo a odpovězte:



A. Vzniklo topologické uspořádání.
B. Nevzniklo topologické uspořádání.
C. Mohlo by vzniknout, ale nemusí, záleží na výběru kořenů.
D. Chci ještě další hint.

4B

A. Zjištění patí obecně.
B. Zjištění nemusí někdy platit, ale nevím kdy.
C. Zjištění nemusí někdy platit, a mám příklad.
D. Chci ještě další hint.

5. Z orientovaného grafu máme odstranit všechny hrany, jejichž krajní uzly náleží různým silným komponentám. Jaká je asymptotická složitost tohoto procesu?

5A. Detekce silných komponent proběhne v čase, který je vůči počtu hran

A. Logaritmický.
B. Lineární.
C. $|E| \times \log(|E|)$.
D. Kvadratický.
E. Kubický nebo vyšší.

5B. Pro každý uzel lze určit, do které komponenty patří

A Již při běhu Tarjanova algoritmu v konstantním čase.
B Již při běhu Tarjanova algoritmu v čase horším než konstantním.
C.Tarjanův algortmus napřed musí kompletně doběhnout a pak v čas O(1) pro každý uzel.
D.Tarjanův algoritmus napřed musí kompletně doběhnout a pak v čas O(|V|) pro každý uzel.
E.Tarjanův algoritmus napřed musí kompletně doběhnout a pak v čas O(|E|) pro každý uzel.
F. Lze během i po a pokaždé s konstantní složitostí pro každý uzel.

6. Je dán orientovaný graf G s *n* uzly a *m* hranami. Do tohoto grafu máme přidat co nejmenší počet nových hran tak, aby se výsledný graf stal silně souvislý. Navrhněte efektivní algoritmus řešení této úlohy a určete jeho asymptotickou složitost.

Kondenzace

7. Dva orientované grafy G_1, G_2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

8. Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?

9. V acyklickém ohodnoceném grafu máme najít cestu z některého jeho kořene do některého jeho listu s nejvyšší možnou cenou, kořen a list zvolíme sami. Formulujte algoritmus, zdůvodněte jeho asymptotickou složitost a určete vhodnou reprezentaci grafu pro tuto úlohu.

10. Acyklický slabě souvislý graf byl porušen tím způsobem, že do něj byly omylem přidána hrana, která porušuje acykličnost tím, že uzavírá nějaký cyklus v grafu. Nevíme, která hrana to je, a možná to ani nelze pokaždé určit. Máme ale v čase úměrném počtu hran grafu určit co nejmenší množinu hran pozměněného grafu, která určitě přidanou hranu obsahuje. Rozhodněte a zdůvodněte, zda to je možné.
(Slabě souvislý = po zrušení orientace je výsledný neorientovaný graf souvislý)

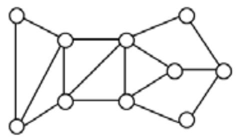
11. Slabě souvislý orientovaný graf G s n uzly a m hranami obsahuje $c1$ kořenů a $c2$ listů, přičemž hodnoty n, $c1$, $c2$ jsou pevně dány. Pro které hodnoty m je zaručeno, že G bude acyklický? Jaká je vůbec maximální možná hodnota m v závislosti na n, $c1$, $c2$?

12. V jakém čase lze vytvořit kondenzaci grafu za předpokladu, že graf je reprezentován pouze neuspořádaným seznamem hran (= uspořádaných dvojic uzlů) a další reprezentaci tohoto grafu nebudeme vytvářet?

13. Každou cestu mezi dvěma silnými komponentami A a B v orientovaném grafu ohodnotíme číslem vyjadřujícím počet různých silných komponent, kterými tato cesta prochází. Vzdálenost komponent A, B definujeme jako číslo rovné nejnižšímu ze všech uvedených ohodnocení. Pokud žádná cesta mezi A a B nevede, vzdálenost A a B definujeme jako kladné nekonečno. Formulujte efektivní algoritmus, který určí vzdálenost komponent A a B a určete jeho asymptotickou složitost. Na vstupu algoritmu budou vždy dva uzly $x \in A$, $y \in B$.

14. V jakém čase lze vytvořit kondenzaci grafu za předpokladu, že graf je reprezentován pouze neuspořádaným seznamem hran (= uspořádaných dvojic uzlů) a další reprezentaci tohoto grafu nebudeme vytvářet?

15. Neorientovaný graf typu (r) vytvoříme takto: Zvolíme dvě disjunktní množiny uzlů A = $\{a_1, a_2, \ldots a_r\}$, B = $\{b_1, b_2, \ldots b_r\}$, nad množinou A vytvoříme úplný graf, nad množinou B vytvoříme úplný graf a do grafu přidáme hrany (a_1, b_1), (a_2, b_2) ..., (a_r, b_r). Pro která r bude výsledný graf Eulerovský?



16. Poskytněte kompletní zdůvodnění, proč graf na obrázku neobsahuje Hamiltonovskou kružnici. Obsahuje Hamiltonovskou cestu? Lze do tohoto grafu přidat jednu hranu tak, aby v tako rozšířeném grafu existovala Hamiltonovská kružnice?

Otázky zároveň kombinatorické :

17. Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

18. Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.