ALG 10

Dynamické programování

zkratka: DP

Zdroje, přehledy, ukázky viz

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/a4b33alg/literatura_odkazy

Dynamické programování

Příklady aplikací:

- Optimální rozvrhování navazujících procesů
- Přibližné vyhledávání v textu daných vzorků (bioinformatika)
- Optimální plnění ruksaku (kontejneru, nádob...)
- Hledání optimálních cest/spojení v grafech, sítích...
- Nejdelší podposloupnosti s předepsanými vlastnostmi
- Nejdelší společná podposloupnost
- Optimální pořadí násobení matic
- Optimální vyhledávací strom
- Optimální vrcholové pokrytí hran stromu
- Množství dalších....

Dynamické programování

Charakteristika

Neřeší jeden konkrétní typ úlohy, je to všeobecná strategie (podobně jako Rozděl a panuj) pro řešení převážně optimalizačních úloh z různých oblastí tvorby algoritmů.

Významné vlastnosti

1. Hledané optimální řešení lze sestavit z vhodně volených optimalních řešení téže úlohy nad redukovanými daty.

2. V rekurzivně formulovaném postupu řešení se opakovaně objevují stejné menší podproblémy.
DP umožňuje obejít opakovaný výpočet většinou jednoduchou tabelací výsledků menších podproblémů.

Dynamické programování

Seznam DP algoritmů na en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_programming

- Recurrent solutions to lattice models for protein-DNA binding
- Backward induction as a solution method for finite-horizon discrete-time dynamic optimization problems
- Method of undetermined coefficients can be used to solve the Bellman equation in infinite-horizon, discrete-time, discounted, time-invariant dynamic optimization problems
- Many string algorithms including longest common subsequence, longest increasing subsequence, longest common substring, Levenshtein distance (edit distance)
- Many algorithmic problems on graphs can be solved efficiently for graphs of bounded treewidth or bounded clique-width by using dynamic programming on a tree decomposition of the graph.
- The Cocke–Younger–Kasami (CYK) algorithm which determines whether and how a given string can be generated by a given context-free grammar
- Knuth's word wrapping algorithm that minimizes raggedness when word wrapping text
- The use of transposition tables and refutation tables in computer chess
- The Viterbi algorithm (used for hidden Markov models)
- The Earley algorithm (a type of chart parser)
- The Needleman–Wunsch and other algorithms used in bioinformatics, including sequence alignment, structural alignment, RNA structure prediction
- Floyd's all-pairs shortest path algorithm
- Optimizing the order for chain matrix multiplication
- Pseudo-polynomial time algorithms for the subset sum and knapsack and partition problems
- The dynamic time warping algorithm for computing the global distance between two time series
- The Selinger (a.k.a. System R) algorithm for relational database query optimization
- De Boor algorithm for evaluating B-spline curves
- Duckworth–Lewis method for resolving the problem when games of cricket are interrupted
- The value iteration method for solving Markov decision processes
- Some graphic image edge following selection methods such as the "magnet" selection tool in Photoshop
- Some methods for solving interval scheduling problems
- Some methods for solving word wrap problems
- Some methods for solving the travelling salesman problem, either exactly (in exponential time) or approximately (e.g. via the bitonic tour)
- Recursive least squares method
- Beat tracking in music information retrieval
- Adaptive-critic training strategy for artificial neural networks
- Stereo algorithms for solving the correspondence problem used in stereo vision
- Seam carving (content aware image resizing)
- The Bellman–Ford algorithm for finding the shortest distance in a graph
- Some approximate solution methods for the linear search problem
- Kadane's algorithm for the maximum subarray problem

Ilustrační otisk obrazovky

Tabelace v DP - příklad

Definice funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \ \ || \ \ (y = 0) \\ 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y) & (x > 0) \ \ \&\& \ (y > 0) \end{cases}$$

Otázka

$f(10,10) = ?$

Program

```
int f( int x, int y ) {
  if ( (x == 0) || (y == 0) )
    return 1;
  return ( 2* f(x, y-1) + f(x-1,y) );
}
```

```
print( f(10,10) );
```

Odpověď

$f(10,10) = 127\ 574\ 017$

Tabelace v DP - příklad

Jednoduchá analýza

```
int count = 0;

int f( int x, int y ){
  count++;
  if ( (x == 0) || (y == 0) )
    return 1;
  return ( 2* f(x, y-1) + f(x-1,y) );
}
```

```
xyz = f( 10,10 );
print( count );
```

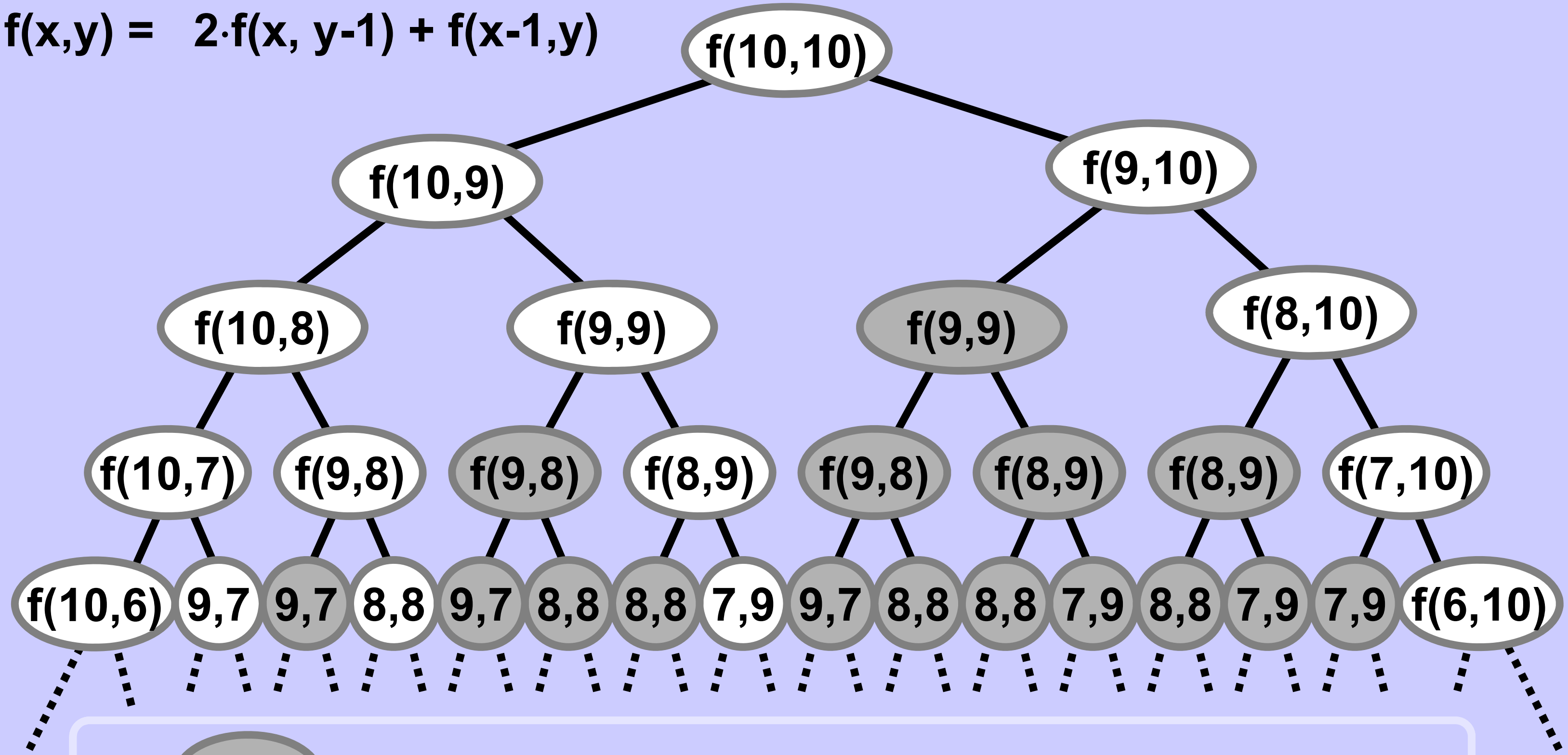
Výsledek analýzy

count = 369 511 ☹

Tabelace v DP - příklad

Detailnější analýza – strom rekurzivního volání

$f(x,y) = 2 \cdot f(x, y-1) + f(x-1,y)$

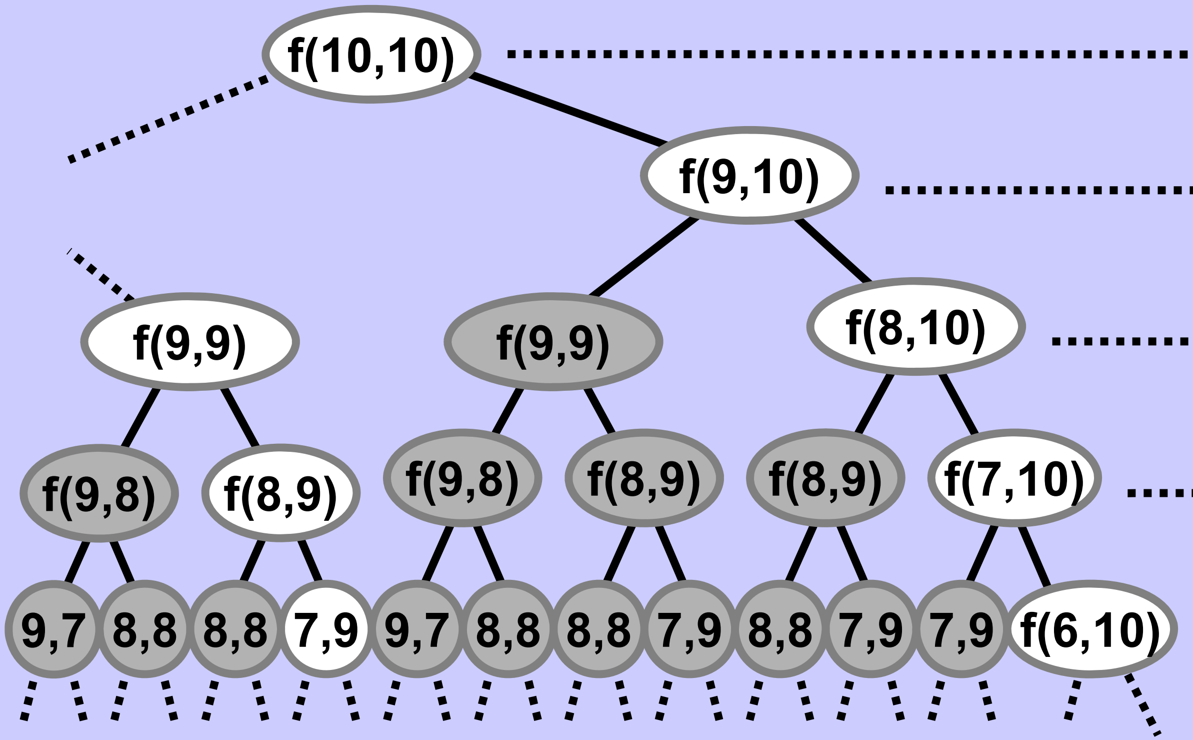


f(x,y) ... Opakující se výpočty, velké množství!

8,8 9,7 zobrazeny jen parametry pro nedostatek místa

Tabelace v DP - příklad

Detailnější analýza pokračuje – efektivita rekurzivního volání

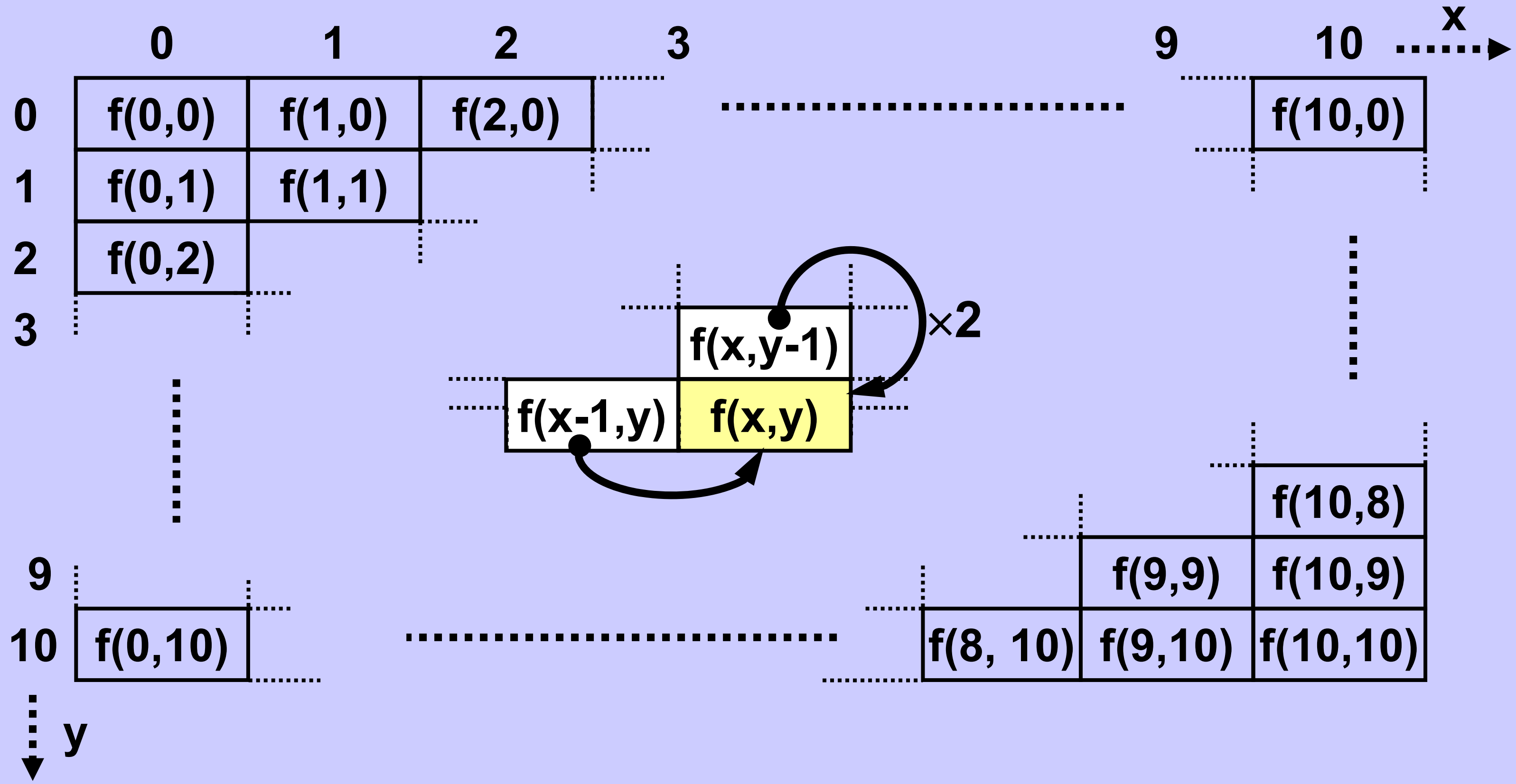


počet:	volání	hodnot
	1	1
	2	2
	4	3
	8	4
	16	5
	...	...
	512	10
	...	...

Tabelace v DP - příklad

$$\boxed{f(x,y)} = \begin{cases} 1 & (x = 0) \;\;||\;\; (y = 0) \\ 2 \cdot \boxed{f(x, y-1)} + \boxed{f(x-1,y)} & (x > 0) \;\;\&\&\; (y > 0) \end{cases}$$

Tabulka všeobecně

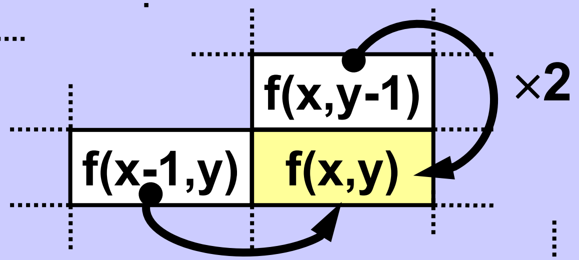


Tabelace v DP - příklad

$$\boxed{f(x,y)} = \begin{cases} 1 & (x = 0) \ \ || \ \ (y = 0) \\ 2 \cdot \boxed{f(x, y-1)} + \boxed{f(x-1,y)} & (x > 0) \ \&\& \ (y > 0) \end{cases}$$

Tabulka numericky

y \ x	0	1	2	3	4	…		9	10
0	1	1	1	1	1	…			1
1	1	3	5	7	9				
2	1	7	17	31					
3	1	15	49						
4	1	31							
…	…								8085505
9								16807935	32978945
10	1					…	28000257	61616127	127574017



Tabelace v DP - příklad

Všechny hodnoty se předpočítají

```
int dynArr [N+1][N+1];

void fillDynArr(){

  for( int xy = 0; xy <= N; xy++ )
      dynArr[0][xy] = dynArr[xy][0] = 1;

  for( int y = 1; y <= N; y++ )
    for( int x = 1; x <= N; x++ )
       dynArr[y][x] = 2*dynArr[y-1][x] + dynArr[y][x-1];
}
```

Volání funkce

```
int f( int x, int y ){
  return dynArr[y][x];
}
```

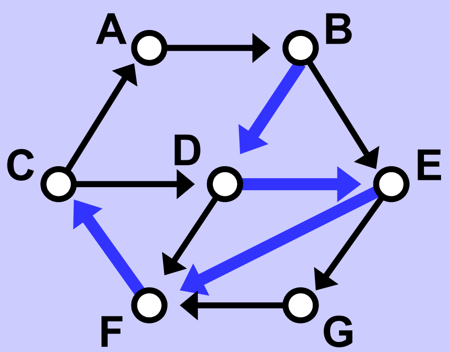
Hledání optimálních cest v grafu

Značení
Graf G = (V, E), množina uzlů resp. hran: V(G) resp. E(G),
N = |V(G)|, M = |E(G)|, případně n = |V|, m = |E(G)| apod.

Cesta v grafu
= posloupnost na sebe navazujících hran,
která prochází každým uzlem nejvýše jednou.

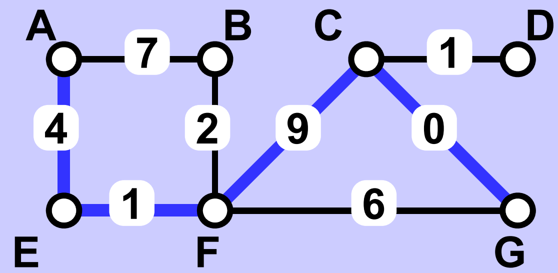
Délka cesty v neváženém grafu
= počet hran na cestě.

Př. Délka (B D E F C) = 4.



Délka cesty ve váženém grafu
= součet vah hran na cestě.

Př. Délka (A E F C G) = 14.



Hledání optimálních cest v grafu

Nejkratší cesty

Úloha nalezení nejkratší cesty mezi dvěma danými uzly,
případně mezi některými dvojicemi uzlů nebo
mezi všemi dvojicemi uzlů.
(Například minimalizace nákladů na přesun z X do Y.)

Postupy

Je vyřešena úspěšně pro všechny praktické případy.
V neváženém obecném grafu známe BFS,
pro jiné případy, zejména vážených grafů, existují specializované algoritmy -- Dijkstra, Floyd-Warshall, Johnson, Bellman-Ford, atd.

Složitost

Asymptotická složitost je vždy polynomiální v počtu uzlů a hran,
typicky nalezení jedné cesty má složitost nanejvýš $O(N^2)$,
kde N je počet uzlů grafu.

Hledání optimálních cest v grafu

Nejdelší cesty

Úloha nalezení nejdelší cesty v grafu mezi dvěma danými uzly, nebo v celém grafu vůbec.
(Například maximalizace zisků při provádění navzájem závislých činností.)

Exponenciální složitost

NP - těžký problém

Není dosud uspokojivě vyřešena v plné obecnosti.

Možné strategie

1. Brute force -- exponenciální složitost, pro N > cca 30 bezcenná.

2. Algoritmy přibližného řešení s polynomiální složitostí
    -- buď najdou optimum jen s určitou pravděpodobností
    -- nebo zaručí jen nalezení suboptimálního řešení
    -- typicky jsou netriviální a náročné na správnou implementaci.

Hledání nejdelších cest v grafu

Možné strategie

3. Specifické typy grafů dovolují použít efektivní specifický algoritmus.

Nejjednodušší případ

3A.
Graf je strom (vážený ano i ne, orientovaný ano i ne).
Nejdelší cestu lze najít, např. s pomocí průchodu postorder, vždy v čase $\Theta(N)$.

Příležitost pro DP

3B.
Graf je orientovaný, acyklický, vážený ano i ne.
Standardní označení: DAG (Directed Acyclic Graph)

Topologické uspořádání DAG

Topologické uspořádání uzlů DAG je takové pořadí jeho uzlů, ve kterém každá hrana vede z uzlu s nižším pořadím do uzlu s vyšším pořadím.

Každý DAG lze topologicky uspořádat, většinou více způsoby.

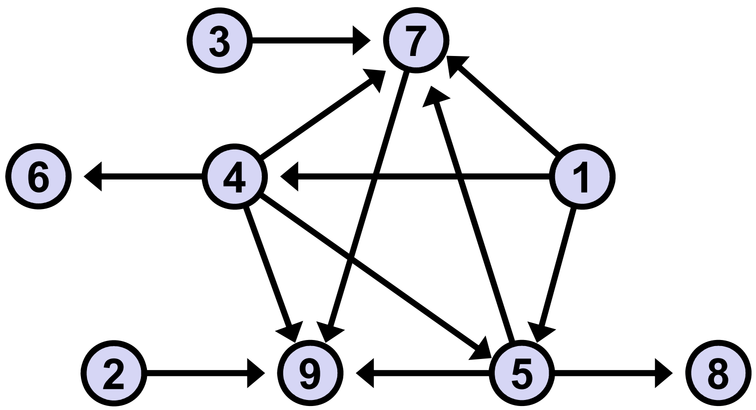
Orientovaný graf s alespoň jedním cyklem nelze topologicky uspořádat.

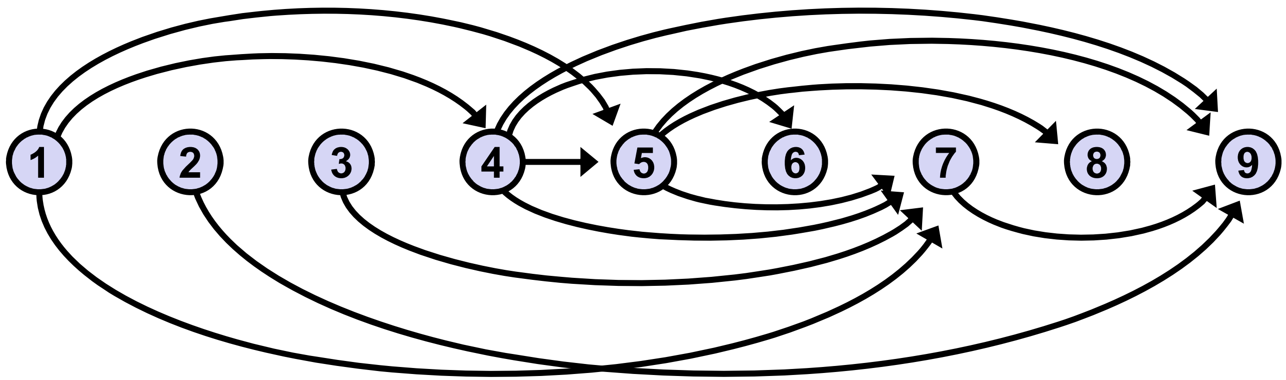
Mnoho úloh DP obsahuje DAG na vstupu již topologicky uspořádaný.

Topologické uspořádání DAG (alespoň jedno) lze sestavit v čase $\Theta(M)$, tj. v čase úměrném počtu hran DAG.

DAG a jeho topologické uspořádání

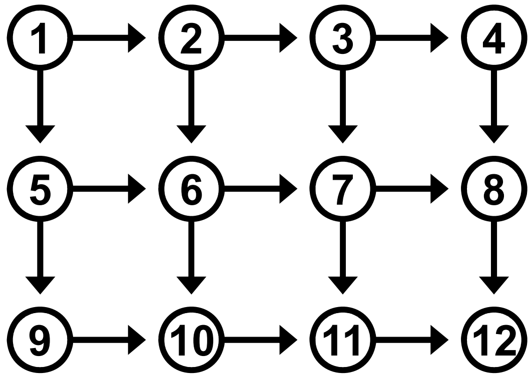
Příklad 1

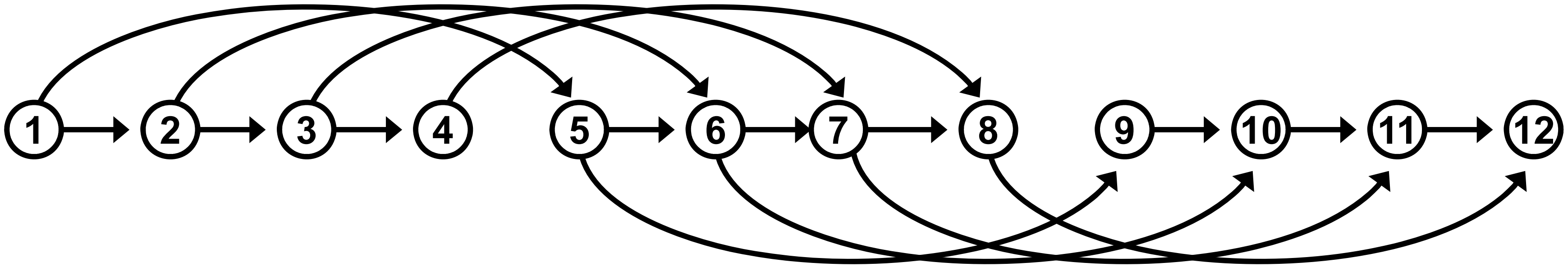




DAG a jeho různá topologická uspořádání

Příklad 2a

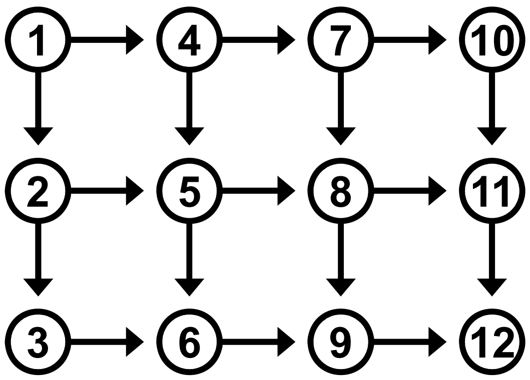


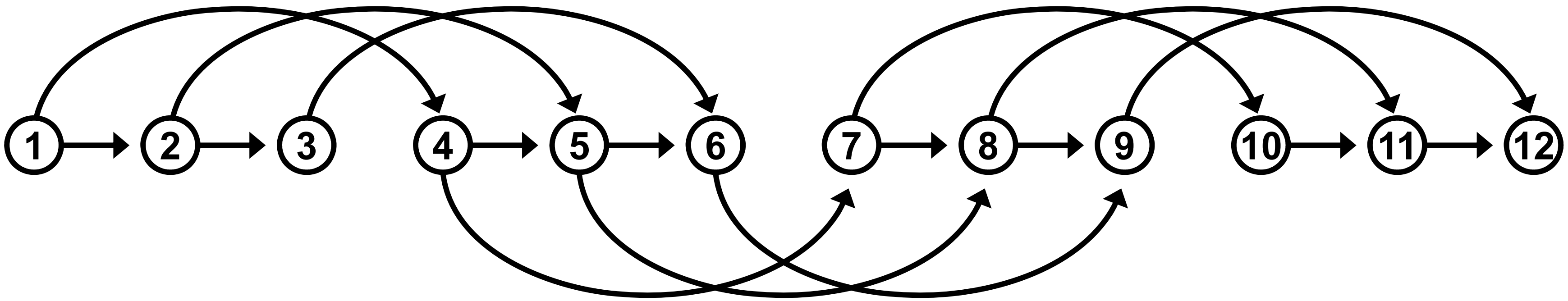


V uzlu je zapsáno jeho pořadí v topologickém uspořádání

DAG a jeho různá topologická uspořádání

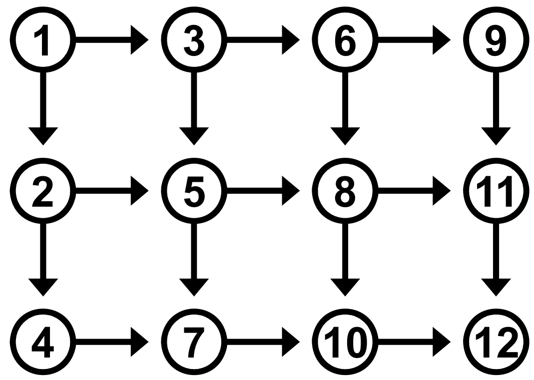
Příklad 2b

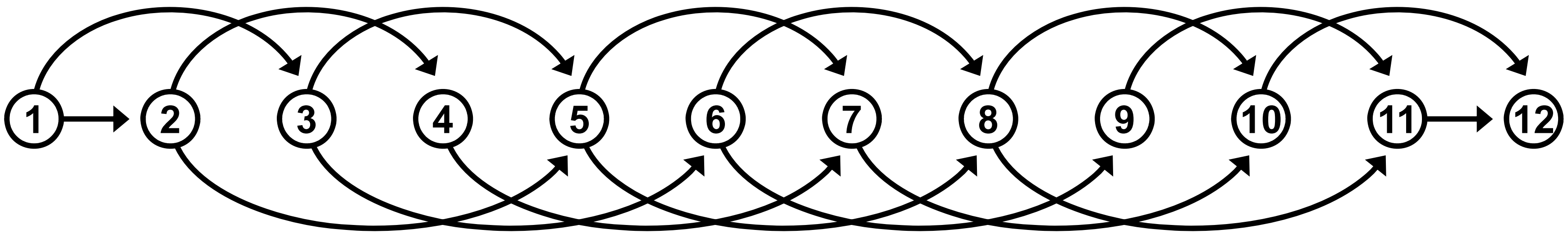




DAG a jeho různá topologická uspořádání

Příklad 2c





Topologické uspořádání DAG

Algoritmus

```
0. new queue Q of Node
   counter = 0

1. for each x in V(G)
       if (x.indegree == 0)     // x is a root
          Q.insert(x)
          x.toporder = counter++

2. while (!Q.empty()) {
   Node v = Q.pop()
   for each edge (v, w) ∈ E(G) {
       G.removeEdge((v, w))
       if (w.indegree == 0)     // w is a root
          Q.insert(w)
          w.toporder = counter++
   }
}
```

Složitost

Předpokládáme, že operace G.removeEdge((v, w)) má konstantní složitost *).

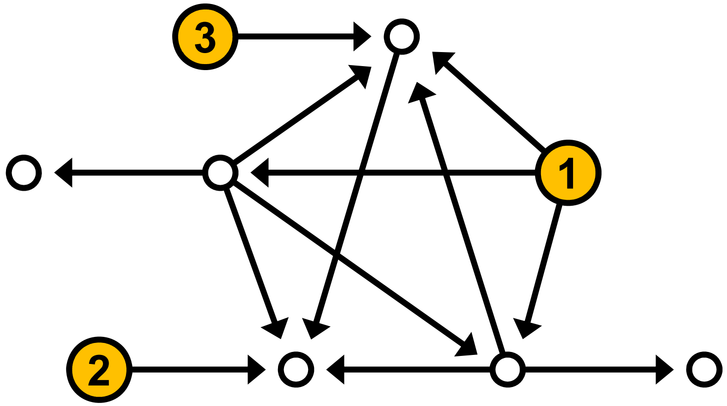
0. Složitost $O(N)$
1. Složitost $\Theta(N)$
2. Složitost $\Theta(M)$, každá hrana je navštívena právě jednou a zpracována v konstantním čase.

Složitost: $\Theta(N+M)$

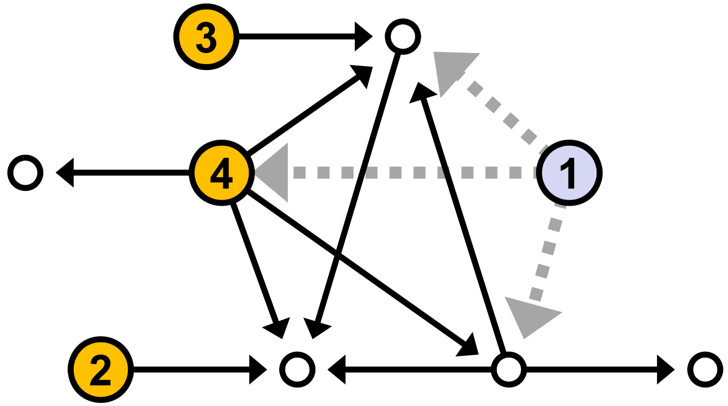
*) *Hranu fyzicky neodstraňujeme, jen ji vhodně označíme a změníme charakteristiky obou krajních uzlů.*

Pořadí, ve kterém se uzly vkládají do fronty, určuje topogické uspořádání DAG.

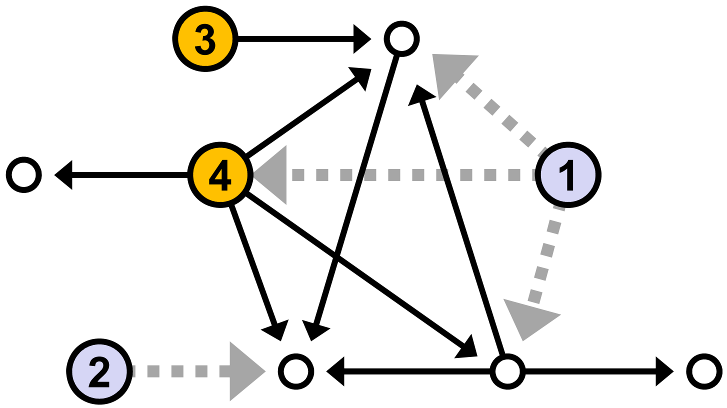
Topologické uspořádání DAG - příklad



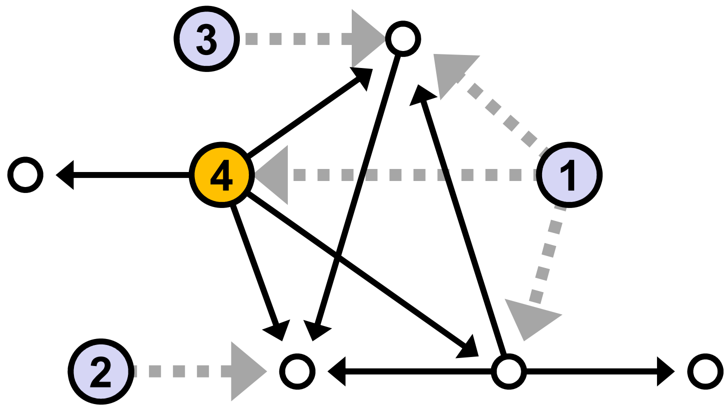
Queue: 1, 2, 3.



Queue: 2, 3, 4.

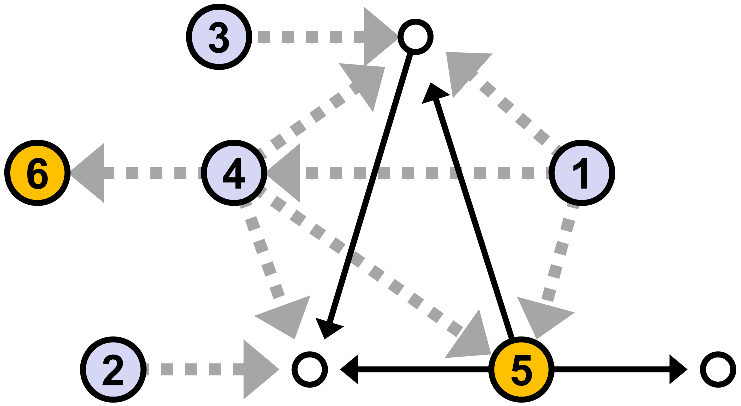


Queue: 3, 4.

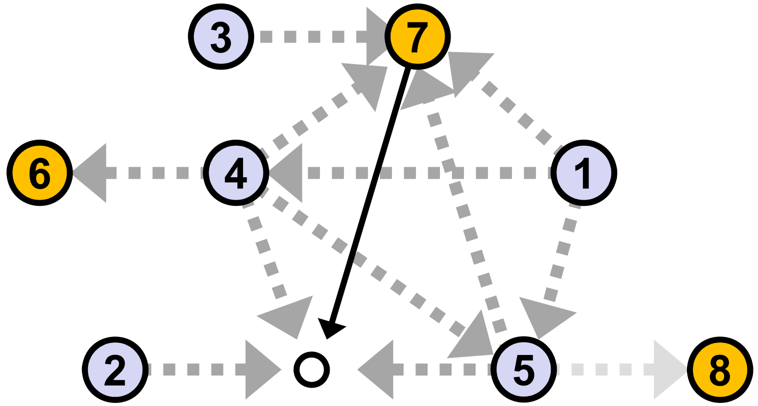


Queue: 4.

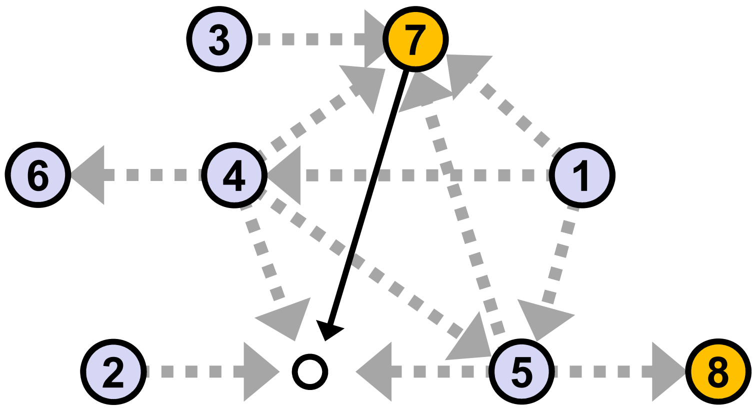
Topologické uspořádání DAG - příklad



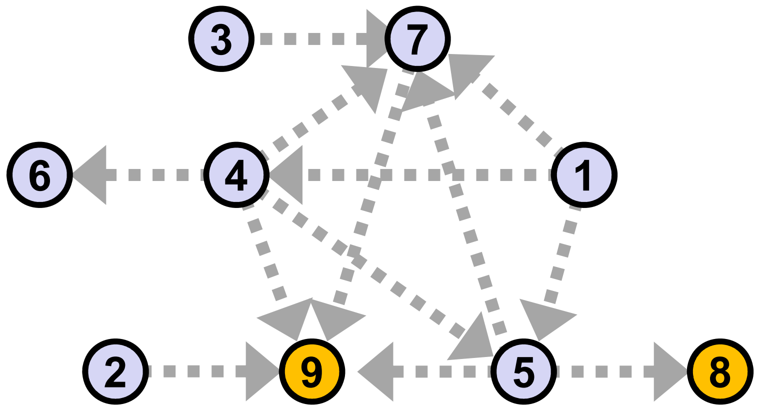
Queue: 5, 6.



Queue: 6, 7, 8.

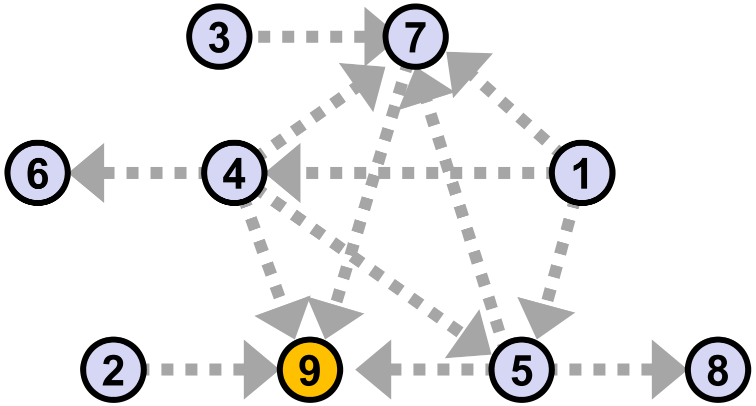


Queue: 7, 8.

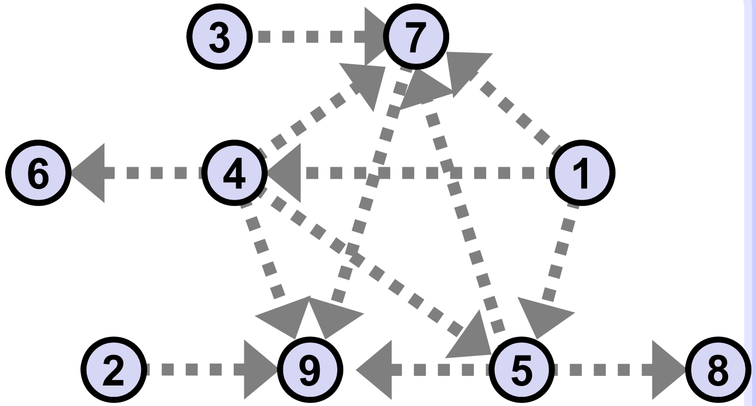


Queue: 8, 9.

Topologické uspořádání DAG - příklad

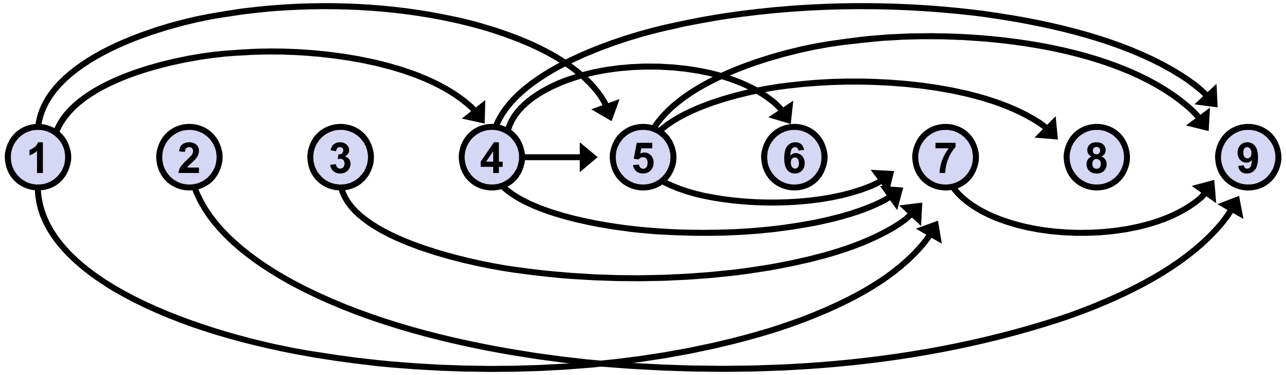


Queue: 9.



Queue: Empty.

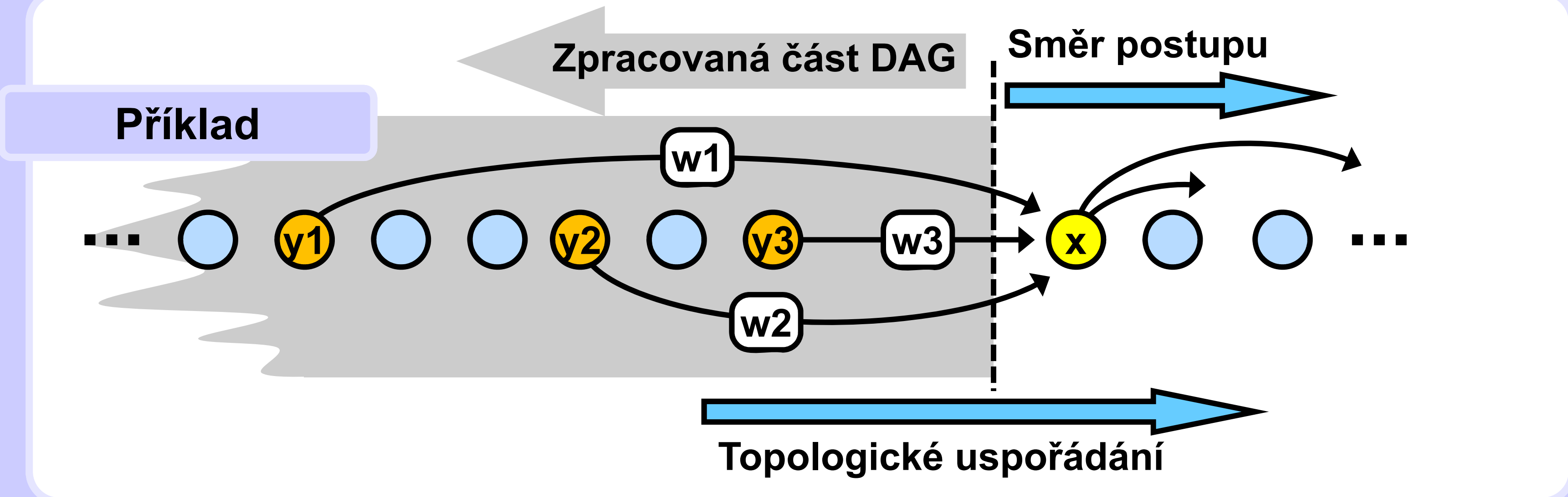
Topologické uspořádání



Nejdelší cesta v DAG

Předpokládáme topologické uspořádání a v jeho směru procházíme DAG.
Označme d[x] délku té cesty v DAG, která končí v x a je nejdelší možná.

Charakteristický pohled "odzadu dopředu":
-- d[x] určujeme až v okamžiku, kdy jsou známy hodnoty d pro všechny předchozí (= již zpracované) uzly v topologickém uspořádání.
-- d[x] určíme jako maximum z hodnot
{ d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk },
kde (y1, x), (y2, x) , ..., (yk, x) jsou všechny hrany končící v x
a w1, w2, ..., wk jsou jejich odpovídající váhy.



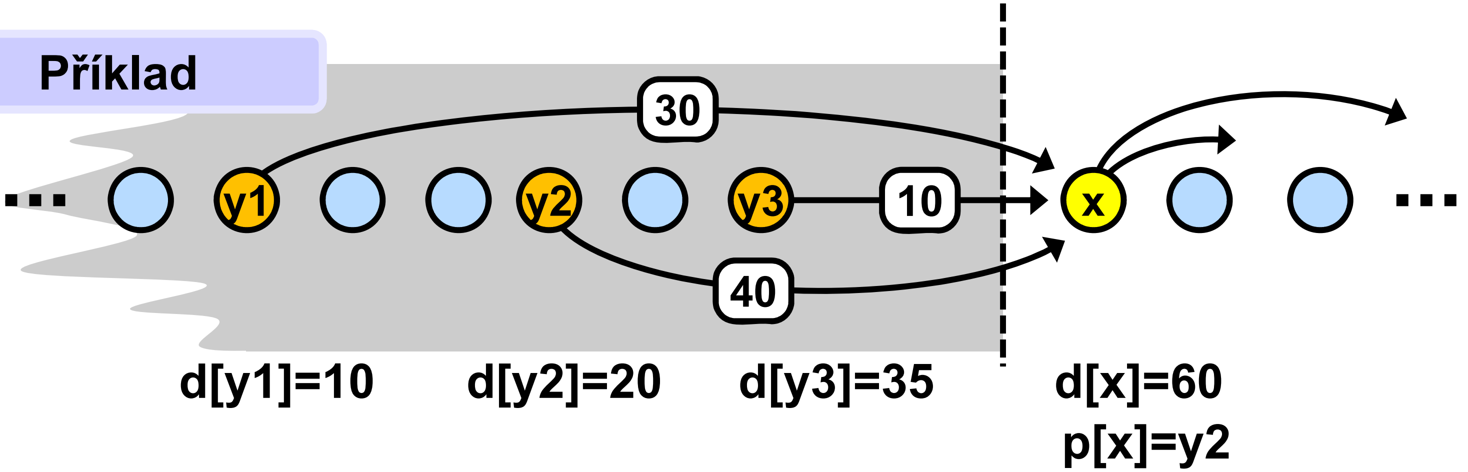
Nejdelší cesta v DAG

-- d[x] určíme jako maximum z hodnot
{ d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk },
kde (y1, x), (y2, x) , ..., (yk, x) jsou všechny hrany končící v x
a w1, w2, ..., wk jsou jejich odpovídající váhy.

-- Uzel yj, pro který je hodnota d[yj] + wj maximální a nezáporná, ustavíme předchůdcem x na hledané nejdelší cestě.

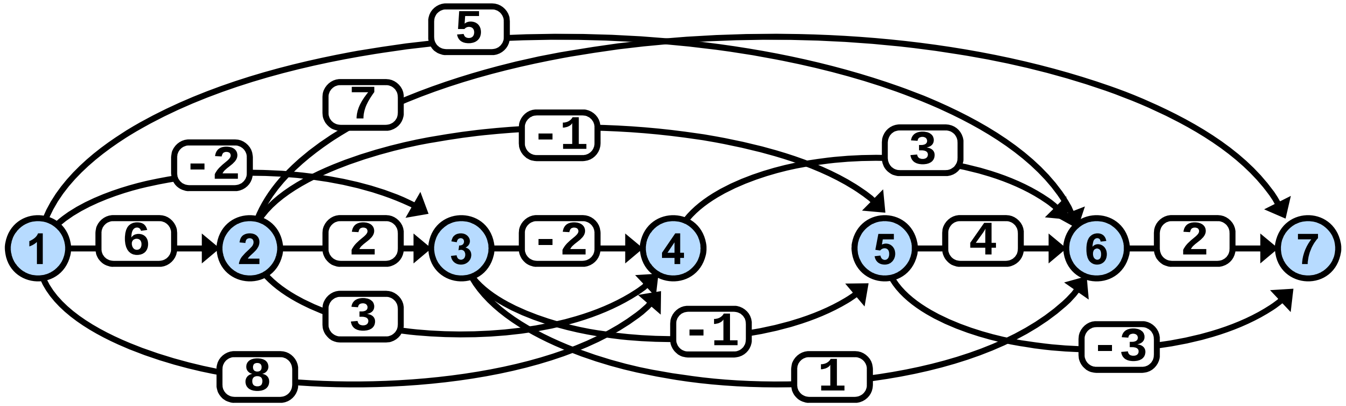
-- Pokud jsou všechny hodnoty {d[y1] + w1, d[y2] + w2, ..., d[yk] + wk} záporné, nepřispívají do nejdelší cesty, pak položíme d[x] = 0, předchůdce x = null.

Příklad



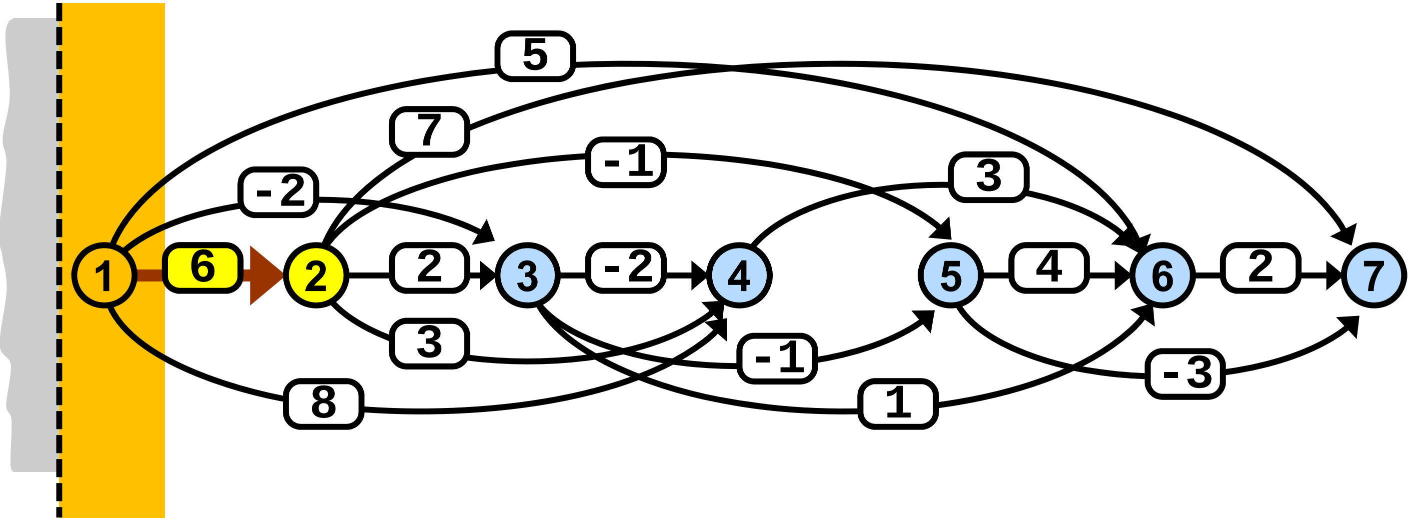
Nejdelší cesta v DAG

Příklad



Určete nejdelší cestu a její délku.

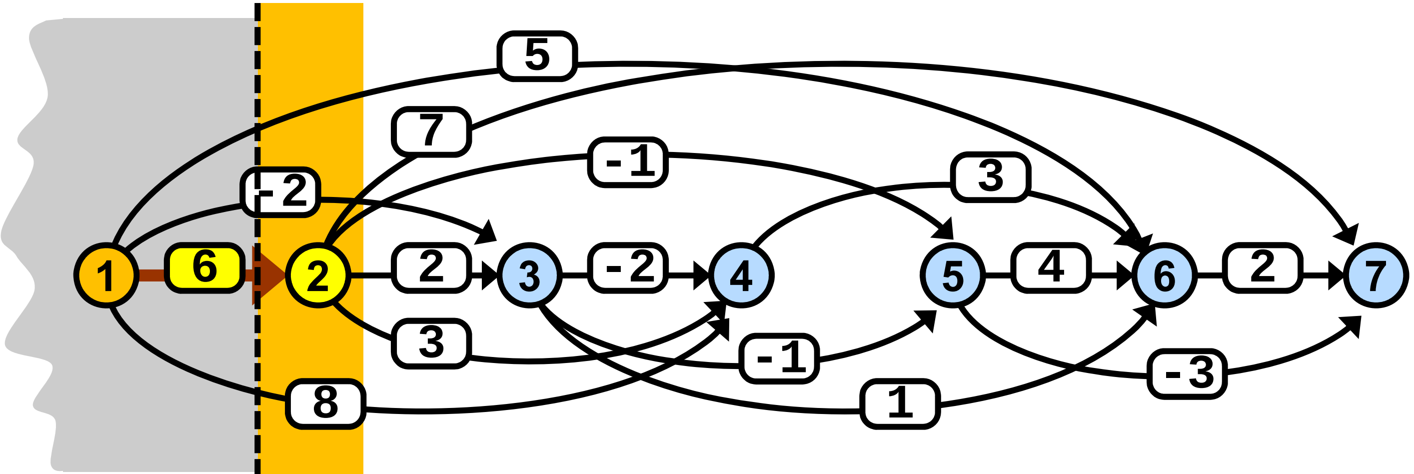
Nejdelší cesta v DAG



d=0

p=nil

Nejdelší cesta v DAG



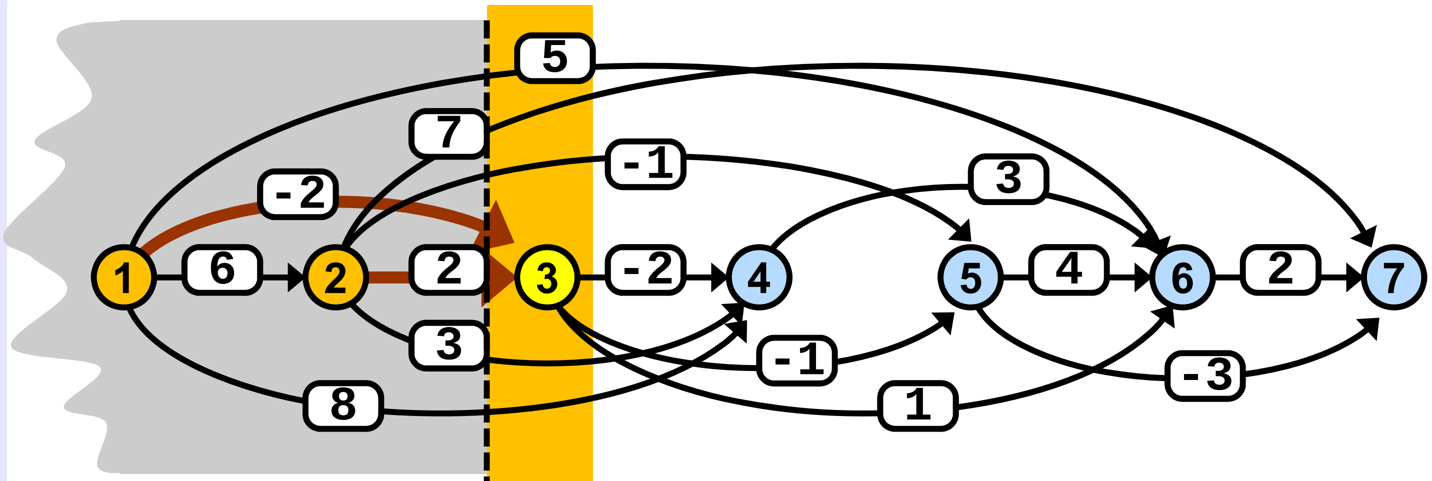
d=0

p=nil

d = max {0+6}
= 6

p=1

Nejdelší cesta v DAG



d=0

p=nil

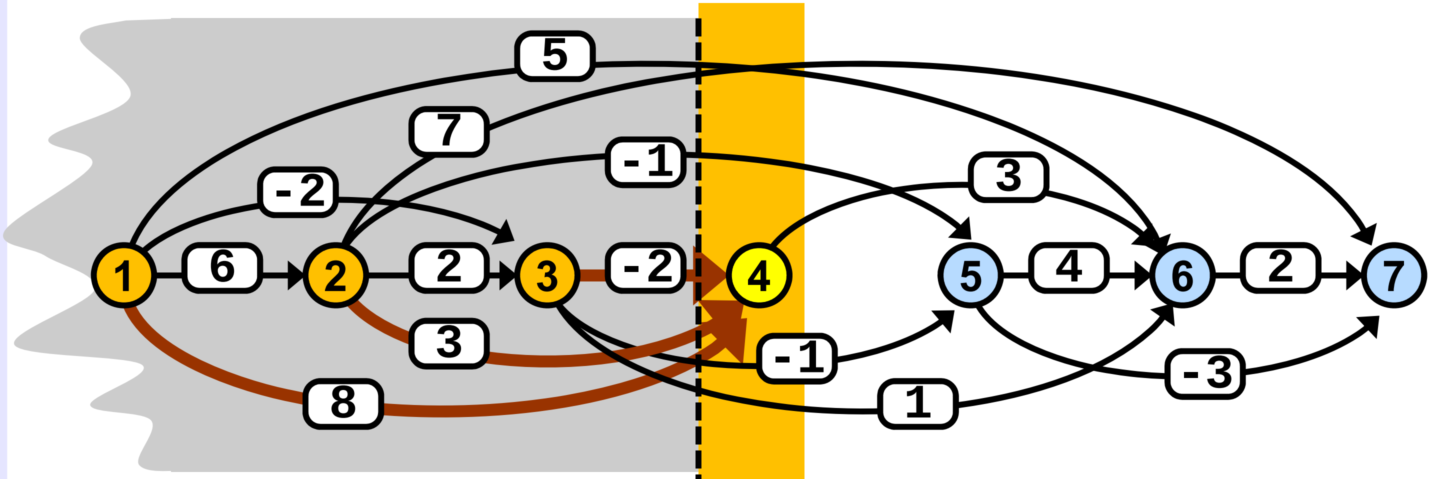
d=6

p=1

d = max {0+-2,
6+2}
= 8

p = 2

Nejdelší cesta v DAG



d=0 p=nil

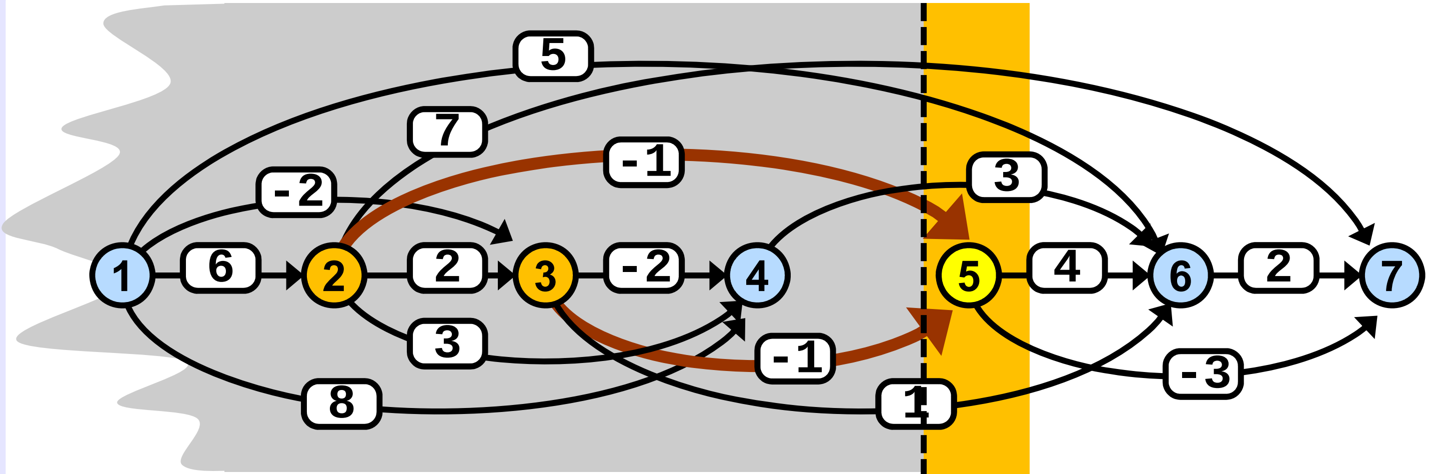
d=6 p=1

d=8 p=2

d = max {0+8,
6+3,
8+-2}
= 9

p = 2

Nejdelší cesta v DAG

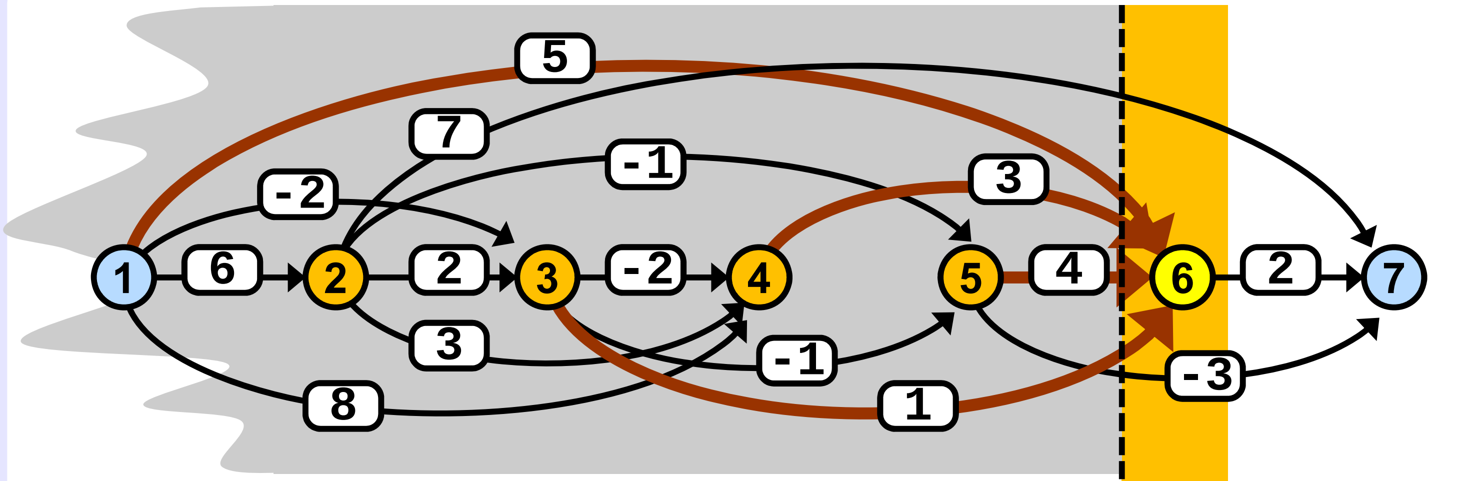


d=0	d=6	d=8	d=9
p=nil	p=1	p=2	p=2

d = max {6+-1,
8+-1}
= 7

p = 3

Nejdelší cesta v DAG

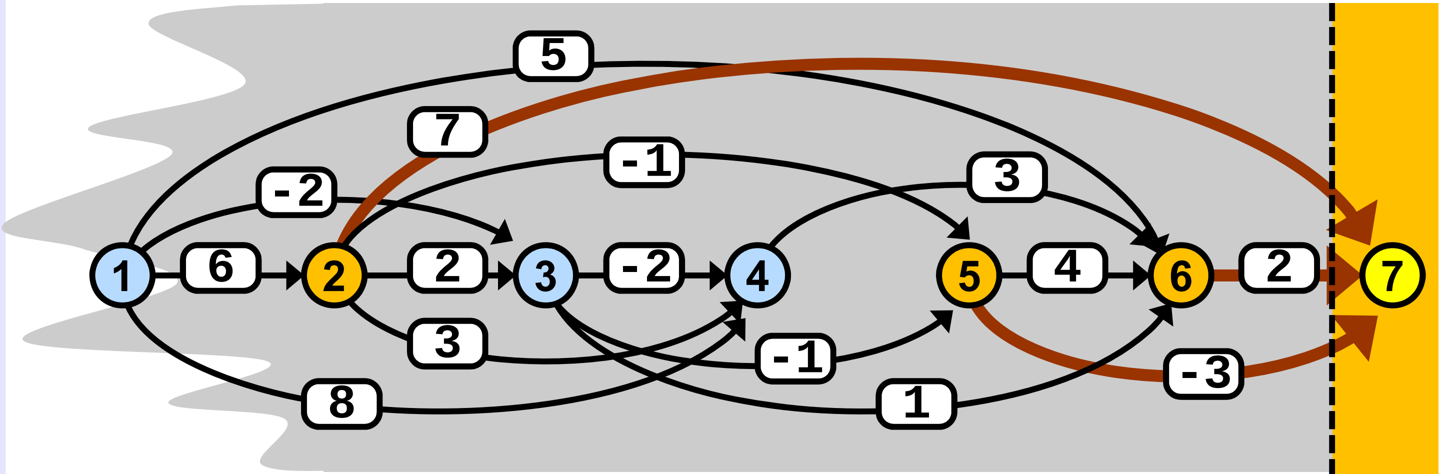


d=0	d=6	d=8	d=9	d=7
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3

d = max {0+5,
8+1,
9+3,
7+4}
= 12

p = 4

Nejdelší cesta v DAG

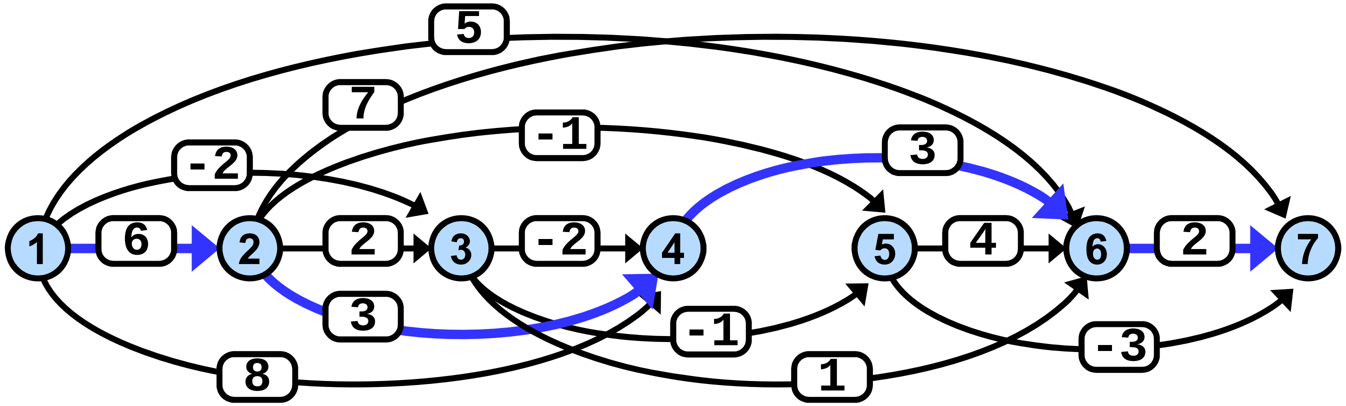


d=0	d=6	d=8	d=9	d=7	d=12
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3	p=4

d = max {6+7,
7+-3,
12+2}
= 14

p = 6

Nejdelší cesta v DAG



d=0	d=6	d=8	d=9	d=7	d=12	d=14
p=nil	p=1	p=2	p=2	p=3	p=4	p=6

Délka nejdelší cesty: 14
Nejdelší cesta: 1 -- 2 -- 4 -- 6 -- 7

Nejdelší cesta v DAG

```
0. allocate memory for distance and predecessor of each node

1. for each node x in V(G) {
       x.dist = 0        // avoids negative path lengths
       x.pred = null
   }

// supposing nodes are processed
// in ascending topological order
2. for each node x in V(G) {
     for each edge e = (y, x)
       if (x. dist < y.dist + e.weight) {
         x. dist = y.dist + e.weight
         x.pred = y;
   }
}
```

0. Složitost Θ(N)

1. Složitost Θ(N)

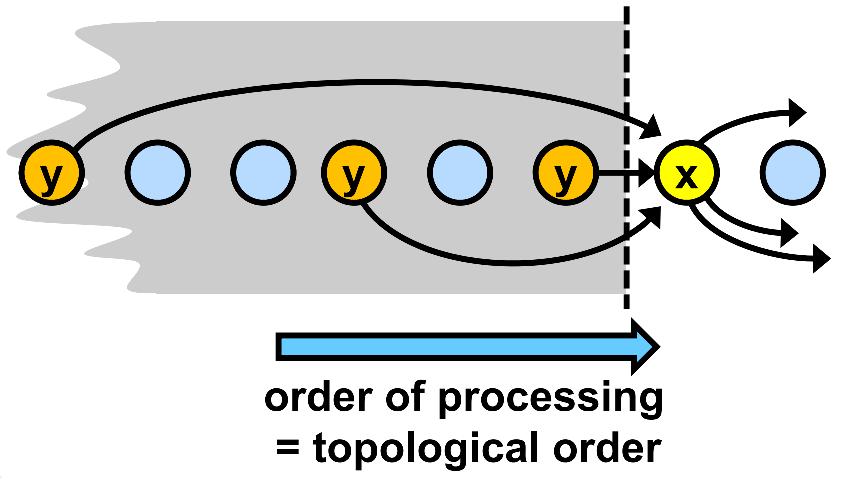
2. Složitost Θ(M),
   každá hrana je navštívena právě jednou a zpracována v konstantním čase.

Složitost: Θ(N+M)

Nejdelší cesta v DAG

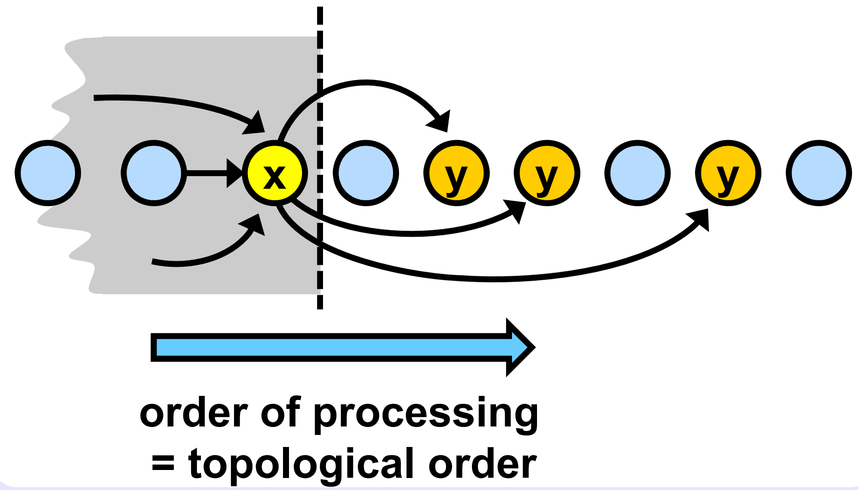
Varianta I

```
2. for each node x in V(G) {
     for each edge e = (y, x) in E(G)
       if (x. dist < y.dist + e.weight) {
         x. dist = y.dist + e.weight
         x.pred = y;
     }
   }
```



Varianta II

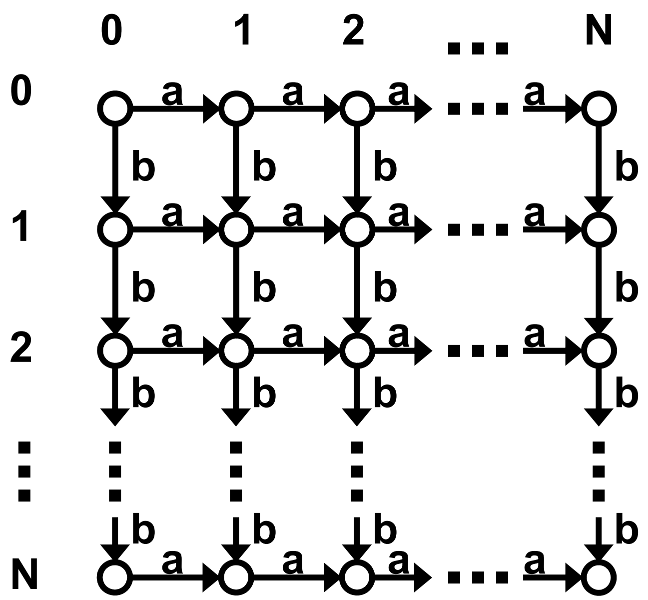
```
2. for each node x in V(G) {
     for each edge e = (x, y) in E(G)
       if (y. dist < x.dist + e.weight) {
         y. dist = x.dist + e.weight
         y.pred = x;
     }
   }
```



Nejdelší cesty v DAG

Problém rekonstrukce *všech* optimálních cest -- může jich být příliš mnoho.

Ukázka



Každá cesta z kořene do listu je optimální, má cenu N·(a+b).

Počet všech těchto cest je $\binom{2N}{N}$,

přičemž $2^N < \binom{2N}{N} < 4^N$.

Počet optimálních řešení tedy roste exponenciálně vůči hodnotě N. Např.

N	Počet optimálních řešení
1	2
10	184756
20	137846528820
30	118264581564861424
40	107507208733336176461620