Simplexová metoda na řešení lineárního programování

Tom Werner

(Netiskněte, obsahuje animace!)

Báze a bázová řešení

Mnohostěn $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$$

-

Mnohostěn $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{array}$$

- $\{2, 3, 5\}$ není báze (sloupce jsou lineárně závislé)

Báze a bázová řešení

Mnohostěn $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\
 & -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

- $\{1, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení $\mathbf{x}$ je řešením soustavy

$$
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = x_3 = x_6 = 0.
$$

Je přípustné, není degenerované.

Mnohostěn $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr}
\color{red}{-1} & \color{red}{1} & 3 & \color{red}{1} & 0 & 2 & 1 \\
\color{red}{1} & \color{red}{0} & 4 & \color{red}{0} & 1 & 4 & 4 \\
\color{red}{-1} & \color{red}{0} & 4 & \color{red}{1} & 1 & 4 & 2
\end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr} 4 & -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}
$$

- $\{1, 2, 4\}$ je báze. Bázové řešení je nepřípustné, není degenerované.

Báze a bázová řešení

Mnohostěn $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{array}{rrrrrrr}
-1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\
-1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2
\end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \begin{array}{rrrrrr}
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0
\end{array}
$$

- $\{3, 4, 5\}$ je báze. Bázové řešení je nepřípustné a degenerované.

Mnohostěn $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$ kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má lin. nezávislé řádky.

- **Báze** je množina $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ taková, že $|J| = m$ a sloupce matice $\mathbf{A}$ s indexy J jsou lineárně nezávislé (tvoří tedy regulární matici $m \times m$).
- **Bázové řešení** příslušné bázi J je řešení $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ takové, že $x_j = 0$ pro všechna $j \notin J$. Je právě jedno.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **přípustné**, pokud $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- Bázové řešení $\mathbf{x}$ je **degenerované**, pokud má méně než m nenulových složek.

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
 & -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 4 \\
 & -1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \\
\mathbf{x} = & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

- Stejné bázové řešení odpovídá bázi $\{3, 4, 6\}$.
  Degenerované bázové řešení odpovídá více než jedné bázi!

Přípustná bázová řešení = extremální body

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}'} \mathbf{x} \geq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}'} \right\}$$

Tvrzení

Bod mnohostěnu X je extremální, právě když je to přípustné bázové řešení.

Důkaz: Pro $\mathbf{x} \in X$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- Existuje množina I řádků matice $\mathbf{A}'$ tak, že soustava $\mathbf{A}'_I \mathbf{x} = \mathbf{b}'_I$ má právě jedno řešení.
- Existuje množina J sloupců matice $\mathbf{A}$ tak, že soustava

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ x_j &= 0 \quad \forall j \notin J \end{aligned}$$

  má právě jedno řešení.

Standardní báze

Simplexová metoda používá jen **standardní báze**. Výhody:

- Ihned vidíme bázové řešení $\mathbf{x}$: jeho nenulové složky jsou složky $\mathbf{b}$.
- Tedy: bázové řešení $\mathbf{x}$ je přípustné právě když $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \quad \begin{array}{cccccc|c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}
$$

$$
\mathbf{x} = \quad \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}
$$

Bázové řešení příslušné (standardní) bázi $\{1, 4, 5\}$ je řešením soustavy

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_2 = x_3 = x_6 = 0
$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečti $a_{i'j}$-násobek řádku i od řádku i'.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
i & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečti $a_{i'j}$-násobek řádku i od řádku i'.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
 & 1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Přechod k sousední standardní bázi

Ekvivalentní řádkové úpravy (nemění množinu řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$):

- Řádek matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vynásob nenulovým číslem.
- K řádku matice $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ přičti lineární kombinaci ostatních řádků.

Chceme bázový sloupec $j' \in J$ nahradit nebázovým sloupcem $j \notin J$.
Prvek (i, j), pro který $a_{ij'} = 1$, se nazývá **pivot**.
Ekvivalentní úprava kolem pivotu (i, j) nastaví $a_{ij} = 1$ a $a_{i'j} = 0$ pro $i' \neq i$:

1. Vyděl řádek i pivotem a_{ij}.
2. Pro každé $i' \neq i$ odečti $a_{i'j}$-násobek řádku i od řádku i'.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & \color{red}{0} & 8 & 1 & 2 & 8 & 6 \\
 & 1 & \color{red}{0} & 4 & 0 & 1 & 0 & 4 \\
i & 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\
 & & j & & & j' & &
\end{array}
$$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$?

- b_i se změní na $\dfrac{b_i}{a_{ij}}$
- Pro $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}\dfrac{b_i}{a_{ij}}$

$$\begin{array}{cccccc c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$?

- b_i se změní na $\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \iff a_{ij} > 0$
- Pro $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \iff (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\dfrac{b_i}{a_{ij}} \leq \dfrac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i, j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$?

- b_i se změní na $\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \iff a_{ij} > 0$
- Pro $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \iff (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\dfrac{b_i}{a_{ij}} \leq \dfrac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3, 2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not\geq 0$.

Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i,j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$?

- b_i se změní na $\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} > 0$
- Pro $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\dfrac{b_i}{a_{ij}} \leq \dfrac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$

$$\begin{array}{cccccc c}
0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
1 & \color{red}{1} & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1
\end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(2,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $1 > 0$ ale $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$.

Bude nové bázové řešení přípustné?

Nechť $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Jak poznáme, zda po ekv. úpravě kolem pivotu (i,j) zůstane $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$?

Jak se změní $\mathbf{b}$?

- b_i se změní na $\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \quad \iff \quad a_{ij} > 0$
- Pro $i' \neq i$ se $b_{i'}$ změní na $b_{i'} - a_{i'j}\dfrac{b_i}{a_{ij}} \geq 0 \quad \iff \quad (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\dfrac{b_i}{a_{ij}} \leq \dfrac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$

$$\begin{array}{cccccc c} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

- Po úpravě kolem pivotu $(3,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $-1 \not> 0$.
- Po úpravě kolem pivotu $(2,2)$ nebude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $1 > 0$ ale $\frac{3}{1} \not\leq \frac{4}{2}$.
- Po úpravě kolem pivotu $(3,6)$ bude $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, neboť $2 > 0$, $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \leq \frac{4}{4}$.

Nekladný sloupec

Když jsou všechny prvky v nebázovém sloupci $j \notin J$ nekladné:

- Sloupec j se nemůže stát bázovým (nelze v něm vybrat pivot).
- Existuje směr $\mathbf{v}$ tak, že $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v} \in X$ pro každé $\alpha \geq 0$ (mnohostěn obsahuje polopřímku $\Rightarrow$ je **neomezený**).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccc c} 0 & -2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ \mathbf{v} = & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Vektor $\mathbf{v}$ je řešením soustavy

$$\begin{aligned} \mathbf{Av} &= \mathbf{0} \\ v_j &= 1 \\ v_{j'} &= 0 \qquad \forall j' \notin J,\ j' \neq j \end{aligned}$$

(tedy bázové složky $\mathbf{v}$ jsou rovny minus prvky sloupce j).

Ekvivalentní úpravy účelového řádku

Lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,\}$$

reprezentujeme **simplexovou tabulkou**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Přičti k prvnímu (účelovému) řádku tabulky lineární kombinaci ostatních řádků:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}'^T & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \end{bmatrix} + \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A} & d + \mathbf{y}^T\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Nová účelová funkce:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'^T\mathbf{x} - d' &= (\mathbf{c}^T + \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} - (d + \mathbf{y}^T\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d \end{aligned}$$

Hodnota účelové funkce zůstane stejná pro všechna řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tedy úloha se nezmění.

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = & 1 & -2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} &= \begin{matrix} 0 & -3 & -6 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{matrix} \\[1em]
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} &= \begin{matrix} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{matrix} \\[1em]
\mathbf{x} &= \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{matrix}
\end{aligned}
$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru **c**, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{rccccccc}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \quad \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$
\begin{array}{rrrrrrrr}
\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
 & 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\
\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\
\mathbf{x} = & 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ a tedy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & & 1 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ a tedy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.
- Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce $j \notin J$ do báze:
  - když $c_j > 0$, účelová hodnota by stoupla
  - když $c_j < 0$, účelová hodnota by klesla

  (za předpokladu, že nové bázové řešení nebude degenerované, tj. $x_j > 0$).

Redukované ceny

Takto můžeme vynulovat bázové složky vektoru $\mathbf{c}$, tj. $c_j = 0$ pro $j \in J$ (přičti k účelovému řádku násobek řádku, který má ve sloupci j jedničku).

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}^T & d\end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & \quad 3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{matrix} 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & \quad 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & \quad 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & \quad 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{matrix}$$

- Protože $x_j = 0$ pro $j \notin J$, je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ a tedy $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - d = -d$.
- Ihned vidíme, co by udělal vstup sloupce $j \notin J$ do báze:
  - když $c_j > 0$, účelová hodnota by stoupla
  - když $c_j < 0$, účelová hodnota by klesla

  (za předpokladu, že nové bázové řešení nebude degenerované, tj. $x_j > 0$).
- Jestliže v některém sloupci j je $c_j < 0$ a $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i, účelovou funkci můžeme libovolně zmenšovat $\Rightarrow$ úloha je neomezená.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$$

Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & \color{red}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \right)$$

   Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \right)$$

   Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j.

Iterace simplexového algoritmu

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 6 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$$

   Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j.

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}\right)$$

   Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j.

Vstup i výstup iterace je simplexová tabulka taková, že:

- podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$
- ceny c_j v bázových sloupcích jsou nulové (tj. ceny jsou redukované)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & d \\ \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & -3.5 & 2.5 & 0 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ \hline 0 & 4 & 4 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 1 & 0.5 \end{array}\right]$$

Iterace se provede takto:

1. Vyber sloupec j pivotu tak, aby $c_j < 0$.
2. Vyber řádek i pivotu tak, aby nové bázové řešení bylo přípustné, tj.

$$a_{ij} > 0 \quad \wedge \quad \forall i' \neq i\colon (a_{i'j} \leq 0) \vee \left(\frac{b_i}{a_{ij}} \leq \frac{b_{i'}}{a_{i'j}} \right)$$

   Z toho

$$i \in \operatorname*{argmin}_{i' \mid a_{i'j} > 0} \frac{b_{i'}}{a_{i'j}}$$

3. Udělej ekvivalentní úpravu okolo pivotu (i, j) a redukuj cenu c_j.

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny ceny c_j jsou nezáporné (jsme v optimu).

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 0.5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0.5 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Ukončení algoritmu

Algoritmus končí, když je splněna jedna z podmínek:

- Všechny ceny c_j jsou nezáporné (jsme v optimu).

0	0	7	1	0	1	4
0	1	3	0.5	0	2	2
1	0	0	−0.5	0	0	1
0	0	4	0.5	1	4	3

- V každém sloupci j, ve kterém $c_j < 0$, je $a_{ij} \leq 0$ pro všechna i (úloha je neomezená).

0	0	7	−1	0	1	4
0	1	3	−0.5	0	2	2
1	0	0	−0.5	0	0	1
0	0	4	−0.5	1	4	3

Cyklení

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli **cyklení**.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
-2.3 & -2.15 & 13.55 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0.4 & 0.2 & -1.4 & -0.2 & 1 & 0 & 0 \\
-7.8 & -1.4 & 7.8 & 0.4 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli **cyklení**.

0	-1	5.5	-0.75	5.75	0	0
1	0.5	-3.5	-0.5	2.5	0	0
0	2.5	-19.5	-3.5	19.5	1	0

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli **cyklení**.

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & -2.3 & -2.15 & 13.55 & 0.4 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \color{red}{0.4} & 0.2 & -1.4 & -0.2 & 0 \\
0 & 1 & -7.8 & -1.4 & 7.8 & 0.4 & 0
\end{array}
$$

Tohle je počáteční tabulka se sloupci rotovanými o dva doprava.
Další 4 iterace dospějí do počáteční tabulky!

Algoritmus nemusí vždy skončit kvůli **cyklení**.

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & -2.3 & -2.15 & 13.55 & 0.4 & 0 \\
\hline
1 & 0 & \color{red}{0.4} & 0.2 & -1.4 & -0.2 & 0 \\
0 & 1 & -7.8 & -1.4 & 7.8 & 0.4 & 0
\end{array}$$

Tohle je počáteční tabulka se sloupci rotovanými o dva doprava.
Další 4 iterace dospějí do počáteční tabulky!

Blandovo anticyklící pravidlo:

- Při výběru pivotového sloupce vždy vyber sloupec s nejnižším indexem.
- Při výběru pivotového řádku vždy vyber řádek s nejnižším indexem.

Tvrzení: S tímto pravidlem algoritmus vždy skončí za konečný počet kroků.

Pro zahájení simplexového algoritmu musíme vstupní úlohu převést na tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde podmnožina sloupců $\mathbf{A}$ tvoří standardní bázi a $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.

Někdy je to snadné. Např. když má vstupní úloha tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$. Přidáním slackových proměnných $\mathbf{u}$ ji převedeme na úlohu

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \,\}$$

se simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^T & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

ve které sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ tvoří standardní bázi $\mathbf{I}$.

Obecný případ: Dvoufázová simplexová metoda

Vstupní úlohu lze vždy efektivně převést na tvar

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\}$$

kde $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (ale $\mathbf{A}$ nemusí obsahovat standardní bázi).

Vyřeš nejprve pomocnou úlohu

$$\min\{\, \mathbf{1}^T\mathbf{u} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \,\}$$

se simplexovou tabulkou

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}^T & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Platí $(\mathbf{1}^T\mathbf{u} = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{u} = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b})$. Proto:

- Vstupní úloha je nepřípustná $\Leftrightarrow$ pomocná úloha má opt. hodnotu kladnou.
- Vstupní úloha je přípustná $\Leftrightarrow$ pomocná úloha má opt. hodnotu nulovou.
  - Jestliže je opt. řešení $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ pomocné úlohy nedegenerované, pak všechny sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ jsou nebázové, proto matice $\mathbf{A}$ obsahuje standardní bázi.
  - Jestliže je opt. řešení $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ pomocné úlohy degenerované, některé sloupce příslušné proměnným $\mathbf{u}$ mohou být bázové. Dalším pivotováním je možno bázi z těchto sloupců 'vyhnat'.