

Optimalizace

Celočíselné lineární programování

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Úloha celočíselného LP a její LP relaxace

Celočíselný lineární program (integer LP, ILP):

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \}$$

Nejčastěji **0-1 lineární program**

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \}$$

Věta

Úloha 0-1 lineárního programování je NP-těžká.

LP relaxace úlohy:

$$\min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \} \geq \min\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in [0, 1]^n \}$$

... protože pro každé $X \subseteq Y$ a $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ platí $\min_{x \in X} f(x) \geq \min_{x \in Y} f(x)$.

Latinské čtverce

Latinský čtverec o straně n je matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$, která v každém řádku a každém sloupci má různá čísla.

Popis pomocí soustavy rovnic s binárními proměnnými:

$$\sum_i x_{ijk} = 1 \quad \forall j, k$$

$$\sum_j x_{ijk} = 1 \quad \forall i, k$$

$$\sum_k x_{ijk} = 1 \quad \forall i, j$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 2 |
| 3 | 4 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 4 |
| 4 | 2 | 1 | 3 |

kde $x_{ijk} = 1$ znamená $a_{ij} = k$.

Úloha na **doplnění latinského čtverce**:

- Jsou dány: číslo n a některá z čísel a_{ij} .
- Rozhodni, zda existují zbývající čísla a_{ij} tak, aby \mathbf{A} byla latinský čtverec.

Věta

Úloha na doplnění latinského čtverce je NP-úplná.

Přřazovací úloha (Linear Assignment Problem)

- Jsou dána čísla c_{ij} pro $i, j = 1, \dots, n$.
- Najdi permutaci $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, která minimalizuje $\sum_{i=1}^n c_{i, \pi(i)}$.

ILP formulace ($x_{ij} = 1$ znamená $\pi(i) = j$):

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podm.} \quad & \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \\ & \sum_i x_{ij} = 1 \quad \forall j \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

LP relaxace nahradí omezení $x_{ij} \in \{0, 1\}$ omezeními $x_{ij} \geq 0$ ($\Rightarrow x_{ij} \in [0, 1]$).

Věta (Birkhoff, von Neumann)

Původní úloha a relaxovaná úloha mají stejné optimální hodnoty.

Mezi optimálními řešeními relaxované úlohy je aspoň jedno celočíselné.

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí (neorientovaného) grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X .

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí

Je dán graf (V, E) . Najdi vrcholové pokrytí s nejmenším počtem vrcholů.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podm.} & x_i + x_j \geq 1 \quad \forall \{i, j\} \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \end{array}$$

Věta

Úloha na nejmenší vrcholové pokrytí je NP-těžká.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podm.} & x_i + x_j \geq 1 \quad \forall \{i, j\} \in E \\ & x_i \in [0, 1] \quad \forall i \in V \end{array}$$

Označme

- x_i ($i \in V$) opt. řešení relaxované úlohy
- $y = \sum_i x_i$ opt. hodnota relaxované úlohy
- $\bar{x}_i = \lfloor x_i + \frac{1}{2} \rfloor$ zaokrouhlené řešení relaxované úlohy (je přípustné!)
- $\bar{y} = \sum_i \bar{x}_i$
- y^* opt. hodnota původní úlohy

Věta (2-aproximace úlohy na nejmenší pokrytí)

Pro každý graf (V, E) máme $\bar{y} \leq 2y^*$ a $y \geq \frac{1}{2}y^*$.

Důkaz: Pro každé $x \geq 0$ je $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \leq 2x$. Tedy $0 \leq y \leq y^* \leq \bar{y} \leq 2y$.

Největší nezávislá množina

Podmnožina $X \subseteq V$ vrcholů grafu (V, E) je **nezávislá**, jestliže žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Úloha na největší nezávislou množinu

Je dán graf (V, E) . Najdi nezávislou množinu s největším počtem vrcholů.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podm.} \quad & x_i + x_j \leq 1 \quad \forall \{i, j\} \in E \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \end{aligned}$$

LP relaxace nahradí omezení $x_i \in \{0, 1\}$ omezeními $x_i \in [0, 1]$.

- Relaxovaná úloha má triviální přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2}$ ($i \in V$) s hodnotou $\frac{1}{2}|V|$.
- Tedy optimální hodnota y LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$.
- Ovšem pro každý úplný graf je opt. hodnota původní úlohy $y^* = 1$.

Věta (neaproximovatelnost úlohy na největší nezávislou množinu)

Pro každé $\epsilon > 0$ je NP-těžké najít přípustné řešení $\bar{x}_i \in \{0, 1\}$ ($i \in V$) splňující $\sum_i \bar{x}_i \geq y^*/\epsilon$.