Optimalizace

11. Dualita v lineárním programování

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Věty o dualitě

$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} \\ \text{za podm.} & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array}$$

Věta (o slabé dualitě)

Pro každá přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Důkaz: Pro přípustná $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ zřejmě platí $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

Věta (o komplementaritě)

Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou přípustná. Pak $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$ právě když

$$\begin{array}{rcll} \sum_j a_{ij}x_j = b_i & \text{nebo} & y_i = 0 & \forall i \\ x_j = 0 & \text{nebo} & \sum_i a_{ij}y_i = c_j & \forall j \end{array}$$

Důkaz: Podmínky komplementarity jdou napsat jako $\mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 = (\mathbf{c}^T - \mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$.
Věta pak plyne z $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T\mathbf{b}$.

Věta (o silné dualitě)

Primární úloha má optimální řešení, právě když duální úloha má optimální řešení.
Pokud $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou optimální řešení, pak $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Důkaz neuvádíme (je složitý).

Příklad

$$
\begin{aligned}
&\min && 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 5.4 \\
3 &= && 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\
2.4 &= && x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
3 &= && x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3 \\
-0.6 &= && -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -1 \\
1.2 &= && x_1 \geq 0 \\
0.6 &= && x_2 \geq 0 \\
0 &= && x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max && 3y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 = 5.4 \\
0.2 &= && y_1 \geq 0 \\
0 &= && y_2 \geq 0 \\
1.6 &= && y_3 \geq 0 \\
0 &= && y_4 \geq 0 \\
2 &= && 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \leq 2 \\
5 &= && y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 \leq 5 \\
3 &= && 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 \leq 6
\end{aligned}
$$

Dovolené možnosti řešitelnosti primáru a duálu

primár/duál	má optimum	neomezená	nepřípustná
má optimum	✓	ne	ne
neomezená	ne	ne	✓
nepřípustná	ne	✓	✓

- Červeně zakázané kombinace plynou ze silné duality
- Zbylá plyne ze slabé duality

Duální proměnné a citlivost primární úlohy

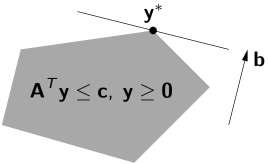
Uvažuj funkci

$$f(\mathbf{b}) = \min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \,\} = \max\{\, \mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \,\}$$

Věta (o stínových cenách)

Nechť má duální úloha pro nějaké $\mathbf{b}$ právě jedno optimální řešení $\mathbf{y}^*$.
Pak je funkce f na nějakém okolí bodu $\mathbf{b}$ diferencovatelná a platí $f'(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}$.

Důkaz: Duál nabývá optima v jediném extremálním bodě $\mathbf{y}^*$ přípustného mnohostěnu duálu:



Změníme-li nepatrně $\mathbf{b}$, optimální duální řešení se nezmění a zůstane jediné.
Tedy na okolí $\mathbf{b}$ je $f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^*$ a $f'(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*T}$.

Příklad

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrr}
\min & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = 5.402 & \qquad & \max & 3.01y_1 + y_2 + 3y_3 - y_4 & = 5.402 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \geq 3.01 & & 0.2 = & y_1 & \geq 0 \\
& x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \geq 1 & & 0 = & y_2 & \geq 0 \\
& x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \geq 3 & & 1.6 = & y_3 & \geq 0 \\
& -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & \geq -1 & & 0 = & y_4 & \geq 0 \\
& x_1 & & & & & \geq 0 & & & 2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 & \leq 2 \\
& & & x_2 & & & \geq 0 & & & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4 & \leq 5 \\
& & & & & x_3 & \geq 0 & & & 2y_1 + 2y_2 + y_3 - 2y_4 & \leq 6
\end{array}
$$

$$f(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^* = (3.01,\ 1,\ 3,\ -1)^T\ (0.2,\ 0,\ 1.6,\ 0) = 5.402$$

Dvojice duálních úloh pro LP v obecném tvaru

$$
\begin{array}{rlrll}
\min & \sum_{j \in J} c_j x_j & \max & \sum_{i \in I} y_i b_i & \\
\text{za podm.} & \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i & \text{za podm.} & y_i \in \mathbb{R} & \forall i \in I_0 \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq b_i & & y_i \geq 0 & \forall i \in I_+ \\
& \sum_{j \in J} a_{ij} x_j \leq b_i & & y_i \leq 0 & \forall i \in I_- \\
& x_j \in \mathbb{R} & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} = c_j & \forall j \in J_0 \\
& x_j \geq 0 & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} \leq c_j & \forall j \in J_+ \\
& x_j \leq 0 & & \sum_{i \in I} y_i a_{ij} \geq c_j & \forall j \in J_-
\end{array}
$$

kde

$$I = \{1, \dots, m\} = I_0 \cup I_+ \cup I_-$$

$$J = \{1, \dots, n\} = J_0 \cup J_+ \cup J_-$$

Příklad:

$$\begin{array}{rrcl}
\min & 2x_1 & & - 3x_3 + x_4 \\
\text{za podm.} & 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 6 \\
& -x_1 + 2x_2 - 3x_3 & \le & 5 \\
& x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 & \ge & 0 \\
& x_1 & \ge & 0 \\
& x_2 & \in & \mathbb{R} \\
& x_3 & \ge & 0 \\
& x_4 & \le & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
\max & 6y_1 + 5y_2 & & \\
\text{za podm.} & y_1 & \in & \mathbb{R} \\
& y_2 & \le & 0 \\
& y_3 & \ge & 0 \\
& 2y_1 - y_2 + y_3 & \le & 2 \\
& -y_1 + 2y_2 - y_3 & = & 0 \\
& y_1 - 3y_2 - y_3 & \le & -3 \\
& 2y_1 - 3y_3 & \ge & 1
\end{array}$$

Příklad:

$$\begin{array}{rrcl}
\min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} & & \\
\text{za podm.} & \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} & \ge & \mathbf{0}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcl}
\max & \mathbf{b}^T\mathbf{y} & & \\
\text{za podm.} & \mathbf{y} & \in & \mathbb{R}^m \\
& \mathbf{A}^T\mathbf{y} & \le & \mathbf{c}
\end{array}$$

Užitečnost LP duality

- certifikát optimality
- návrh nových algoritmů
- teoretický vhled do modelu
- stínové ceny, citlivostní analýza

Příklad: Jak byste spočítali minimum z daných čísel?

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podm.} \quad & x_1 + \cdots + x_n = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & y \\ \text{za podm.} \quad & y \in \mathbb{R} \\ & y \leq c_i \qquad \forall i \end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podm.} \quad & \mathbf{1}^T\mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \max \quad & y \\ \text{za podm.} \quad & y \in \mathbb{R} \\ & y\mathbf{1} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

- silná dualita: optimální hodnota primáru i duálu je očividně $\min\{c_1, \ldots, c_n\}$
- slabá dualita: $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq \min\{c_1, \ldots, c_n\} \geq y$
- komplementarita: optimální $\mathbf{x}, y$ splňují

$$(x_i = 0) \vee (y = c_i) \quad \forall i$$

Ekonomická interpretace duality

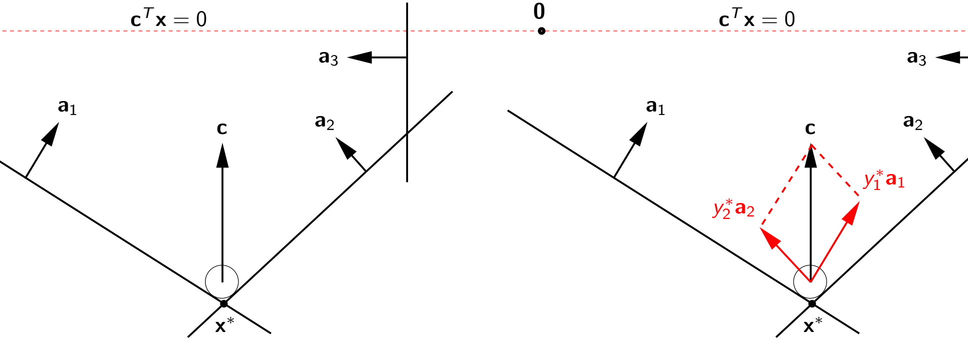
Výroba lupínků a hranolků z brambor a oleje:

$$
\begin{array}{rrcr}
\text{max} & 120l + 76h & & \\
\text{za podm.} & 2l + 1.5h & \leq & 100 \\
 & 0.4l + 0.2h & \leq & 16 \\
 & l & \geq & 0 \\
 & h & \geq & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrcr}
\text{min} & 100a + 16b & & \\
\text{za podm.} & a & \geq & 0 \\
 & b & \geq & 0 \\
 & 2a + 0.4b & \geq & 120 \\
 & 1.5a + 0.2b & \geq & 76
\end{array}
$$

Význam duální úlohy:

- a, b jsou jednotkové ceny surovin (brambor a oleje)
- Překupník: Jaké nejnižší ceny mohu nabídnout, aby mi výrobce prodal své zásoby surovin?
- Optimální duální řešení je $a = 32$ a $b = 140$ (stínové ceny surovin).

Příklad: Míček v mnohostěnu



$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\} \;=\; \max\{\, \mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \,\}$$

- Míček v poloze $\mathbf{x}$ je uvnitř mnohostěnu: $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$
- Potenciální energie $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ je minimální pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ (primární optimum)
- Rovnováha sil na míček (míček se nehýbe): $\mathbf{c} = \sum_i y_i^*\mathbf{a}_i = \mathbf{A}^T\mathbf{y}^*$
- Síly stěn působí dovnitř mnohostěnu: $y_i^* \geq 0$
- Když $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ (míček se stěny i nedotýká), síla stěny na míček je $y_i^* = 0$. Proto $y_i^*(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* - b_i) = 0$ (komplementarita).

Příklad: Medián

Zopakuj: Funkce $f(x) = \sum_{i=1}^n |x - a_i|$ nabývá minima v mediánu čísel $a_1, \dots, a_n$.

$$
\begin{array}{rrl}
\min & \sum_{i=1}^n z_i & \\
\text{za podm.} & x + z_i & \geq a_i \\
 & -x + z_i & \geq -a_i \\
 & z_i & \in \mathbb{R} \\
 & x & \in \mathbb{R}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrll}
\max & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) a_i & & \\
\text{za podm.} & p_i & \geq 0 & i = 1, \dots, n \\
 & q_i & \geq 0 & i = 1, \dots, n \\
 & p_i + q_i & = 1 & i = 1, \dots, n \\
 & \sum_{i=1}^n (p_i - q_i) & = 0 &
\end{array}
$$

Duální úlohu zjednodušíme substitucí

$$2p_i = 1 + t_i, \quad 2q_i = 1 - t_i$$

na

$$\max\left\{ \sum_{i=1}^n a_i t_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^n t_i = 0,\ -1 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

Pozorování: Optimální hodnoty se nezmění, posuneme-li body a_i o konstantu b.

Zvolíme b tak, aby medián čísel a_i byl 0:

- Pak opt. hodnota primáru bude $\sum_{i=1}^n |x - a_i| = \sum_{i=1}^n |a_i|$
- Protože kladných a záporných a_i je stejný počet, duální optimum splňuje $t_i = -1$ pro $a_i < 0$ a $t_i = 1$ pro $a_i > 0$.
  Tedy duální optimální hodnota je $\sum_{i=1}^n a_i t_i = \sum_{i=1}^n |a_i|$.