Optimalizace

10. Konvexní množiny a mnohostěny

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

Konvexní množiny

Definice

Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá **konvexní**, jestliže

$$\mathbf{x} \in X,\ \mathbf{y} \in X,\ 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-\alpha)\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y} \in X.$$

- **Konvexní kombinace** bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je bod $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k$, kde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ a $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$.

  Tvrzení: Množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní, právě když je uzavřená na konvexní kombinace.

- **Konvexní obal** bodů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ je množina všech jejich konvexních kombinací, značíme

  $$\operatorname{conv}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} = \{\, \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0 \,\}.$$

  Obecněji: **konvexní obal množiny** $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin, které množinu X obsahují. Značíme $\operatorname{conv} X$.

Tvrzení: Průnik konvexních množin je konvexní množina.

Příbuzné kombinace, obaly a množiny

Lineární kombinace $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$ vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ se nazývá jejich

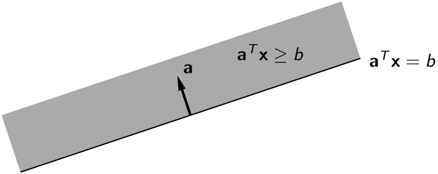
afinní kombinace,	jestliže	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1.$	
nezáporná kombinace,	jestliže		$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0.$
konvexní kombinace,	jestliže	$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,$	$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0.$

Množina, která je uzavřená na

lineární kombinace,	se nazývá	**lineární podprostor**.
afinní kombinace,	se nazývá	**afinní podprostor**.
nezáporné kombinace,	se nazývá	**konvexní kužel**.
konvexné kombinace,	se nazývá	**konvexní množina**.

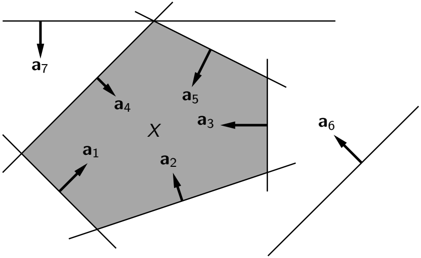
Konvexní mnohostěny

- **Nadrovina** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$, kde $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.
- (Uzavřený) **poloprostor** je množina $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b \,\}$



- **Konvexní mnohostěn** je průnik konečně mnoha poloprostorů

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i \;\; \forall i = 1, \ldots, m \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$



Dimenze konvexního mnohostěnu X se definuje jako $\dim X = \dim \operatorname{aff} X$.

Příklady jednoduchých konvexních mnohostěnů v $\mathbb{R}^n$:

- $\emptyset$, $\mathbb{R}^n$
- afinní podprostor (bod, přímka, rovina, nadrovina, ...)
- polopřímka $\{\, \mathbf{x} + \alpha \mathbf{v} \mid \alpha \geq 0 \,\}$
- poloprostor
- hyperkrychle $[a, b]^n = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x_i \leq b \; \forall i \,\}$
- hyperkvádr *(box)* $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \; \forall i \,\}$
- simplex (konvexní obal $n + 1$ afinně nezávislých bodů)
- standardní simplex $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \,\}$
- křížový polytop *(cross-polytope)* $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 \,\}$
- polyhedrální konvexní kužel (je zároveň konvexní kužel a konvexní mnohostěn)
- nezáporný kužel $\mathbb{R}^n_+$ (kde $\mathbb{R}_+$ je množina nezáporných reálných čísel)

Příklady konvexních množin, které nejsou mnohostěny:

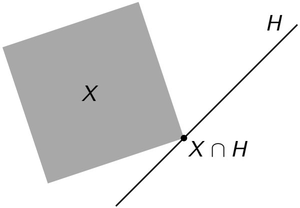
- Koule $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \,\}$ pro $n \geq 2$ (průnik nekonečně mnoha poloprostorů)
- otevřený poloprostor $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} > b \,\}$

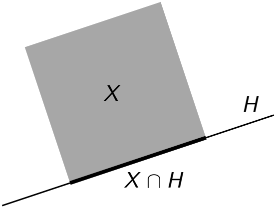
Opěrná nadrovina, stěny

Opěrná nadrovina konvexní množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je nadrovina

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}$$

taková, že $X \cap H \neq \emptyset$ a $\mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq b$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.



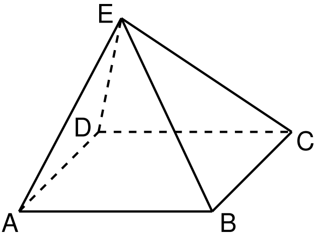


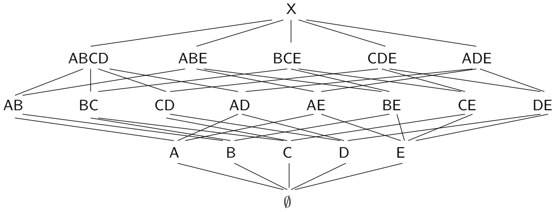
Tvrzení: Každým hraničním bodem konvexního mnohostěnu prochází nějaká opěrná nadrovina.

Definice

Je-li H opěrná nadrovina mnohostěnu X, pak množina $X \cap H$ se nazývá **stěna** mnohostěnu. Stěny jsou také $\emptyset$ a X.

- Stěna dimenze 0 se nazývá **vrchol**.
- Stěna dimenze 1 se nazývá **hrana**.
- Stěna dimenze $\dim X - 1$ se nazývá **faseta**.





Extremální body

Definice

Bod $\mathbf{x} \in X$ je **extremální bod** konvexní množiny X, jestliže

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \ \ \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$$

Tvrzení: Bod $\mathbf{x} \in X$ je vrchol, právě když je to extremální bod.

Pozorování: Počet extremálních bodů některých mnohostěnů je exponenciální v m.

Charakterizace extremálních bodů mnohostěnu

Máme mnohostěn $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Pro $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ označme jako $\mathbf{A}_I$ řádky matice $\mathbf{A}$ s indexy I. Podobně pro $\mathbf{b}_I$.

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- Bod $\mathbf{x}$ je extremální bod mnohostěnu X.
- Existuje neprázdná množina $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tak, že soustava $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má právě jedno řešení $\mathbf{x}$ (tj. platí $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ a $\mathbf{A}_I$ má lineárně nezávislé sloupce).

Důkaz $\Rightarrow$:

Nechť $I = \{ i \mid \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i \}$, tedy $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$.

Je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} > b_i$ pro všechna $i \notin I$. Tedy existuje $\epsilon > 0$ tak, že $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \pm \epsilon \geq b_i$ pro všechna $i \notin I$.

Předpokládej, že sloupce $\mathbf{A}_I$ jsou lineárně závislé, tj. $\mathbf{A}_I\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pro nějaké $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Pak $\mathbf{A}(\mathbf{x} \pm \epsilon\mathbf{v}) \geq \mathbf{b}$ neboli $\mathbf{x} \pm \epsilon\mathbf{v} \in X$. Protože $\mathbf{x} = \frac{1}{2}((\mathbf{x} - \epsilon\mathbf{v}) + (\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{v}))$, máme spor.

Důkaz $\Leftarrow$:

Nechť $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ a $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$, tedy

$$\mathbf{A}_I\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{b}_I$$

$$\mathbf{A}_I\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_I$$

$$\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_I\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_I\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_I$$

Tedy $\mathbf{A}_I\mathbf{x}_1 \geq \frac{1}{2}(\mathbf{A}_I\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_I\mathbf{x}_2) \leq \mathbf{A}_I\mathbf{x}_2$. Z toho plyne $\mathbf{A}_I\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_I\mathbf{x}_2$, z toho $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Nalezení všech extremálních bodů mnohostěnu

Algoritmus: Pro každou neprázdnou $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, otestuj:

- Má soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ právě jedno řešení?
- Splňuje toto řešení $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{x}$?

Pokud oboje platí, pak $\mathbf{x}$ je extremální bod.

Příklad: $X = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \geq 1 \,\} = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$ kde

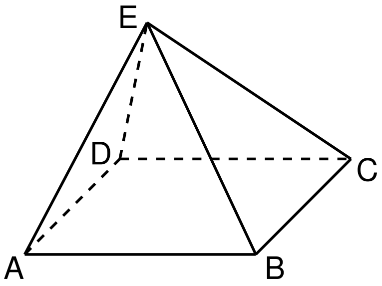
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Zkoumejme podmnožiny $I \subseteq \{1, 2, 3\}$:

- $|I| = 1$: matice $\mathbf{A}_I$ má lin. závislé sloupce.
- $I = \{1, 2\}$: soustava $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení $\mathbf{x} = (0, 0)$, které ale nesplňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{1, 3\}$: soustava má jediné řešení $(x, y) = (0, 1)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- $I = \{2, 3\}$: soustava má jediné řešení $(x, y) = (1, 0)$, které splňuje $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.
- Pro $I = \{1, 2, 3\}$ nemá soustava řešení.

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

- (Neredundantní) nerovnice $\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} \geq b_i$ odpovídají fasetám.
- Množina $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ odpovídá množině faset.
- $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má řešení, právě když se nadroviny určené facetami I protínají.
- $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ má jediné řešení, právě když se nadroviny určené facetami I protínají v jednom bodě.



Extremální body stěny

Lema

Nechť H je opěrná nadrovina konvexní množiny X.

Pak každý extremální bod množiny $X \cap H$ je extremální bod množiny X.

Důkaz:

Nechť $\mathbf{x} \in X \cap H$ není extremální bod X. Tedy $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ kde $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$.
Označíme-li $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b \,\}$, pak

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 &\geq b \\ \mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 &\geq b \\ \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^T\mathbf{x}_2) &= b \end{aligned}$$

Tedy $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 \geq \frac{1}{2}(\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}^T\mathbf{x}_2) \leq \mathbf{a}^T\mathbf{x}_2$, z toho $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 = b$, tedy $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$.
Tedy $\mathbf{x}$ není extremální bod množiny $X \cap H$.

Kdy má mnohostěn extremální bod?

Věta

Jestliže neprázdný konvexní mnohostěn neobsahuje přímku,
pak má (aspoň jeden) extremální bod.

Důkaz: Indukcí podle dimenze mnohostěnu.

Věta platí pro mnohostěny dimenze 0 (body).

Důkaz, že když věta platí mnohostěny dimenze menší než n, pak platí pro mnohostěny dimenze n:

- Nechť $P \subseteq \operatorname{aff} X$ je přímka protínající mnohostěn X.
  Protože X neobsahuje žádnou přímku, P protíná hranici X v aspoň jednom bodě $\mathbf{x}$.
- V bodě $\mathbf{x}$ existuje opěrná nadrovina H neobsahující X. Tedy $\dim(X \cap H) < \dim X$.
- Mnohostěn $X \cap H$ neobsahuje přímku (protože X ji neobsahuje).
- Dle předpokladu má tedy $X \cap H$ extremální bod. Ten je dle Lematu extremální bod X.

Příklady:

- omezený konvexní mnohostěn
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Minimum lineární funkce na mnohostěnu

Věta

Nechť X je konvexní mnohostěn neobsahující přímku.

Nechť lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nabývá na X minima.

Potom existuje extremální bod X, v němž f nabývá na X minima.

Důkaz: Nechť $\mathbf{x}^* \in X$ je argument minima funkce f na X.

Pak $H = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \,\}$ je opěrná nadrovina mnohostěnu X v bodě $\mathbf{x}^*$.

Tudíž f nabývá minima na celé stěně $X \cap H$.

$X \cap H$ neobsahuje přímku, tedy má extremální bod.

Důsledek: Nechť lineární program

$$\min\{\, \mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\}$$

má optimální řešení a mnohostěn přípustných řešení neobsahuje přímku.

Pak lze optimální řešení najít ‘hrubou silou’: projdi všechny extremální body a vyber ten s nejmenší hodnotou f. Ale:

- Co když X obsahuje přímku?
- Jak poznáme, zda úloha má optimální řešení?
- Extremálních bodů X je příliš mnoho.