

# Optimalizace

## 2. Vybraná témata z lineární algebry

---

Tom Werner, Tom Kroupa

FEL ČVUT

# Maticová algebra

---

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- čtvercová:  $m = n$
- obdélníková:  $m \neq n$ 
  - široká:  $m < n$
  - úzká:  $m > n$
- diagonální:  $a_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$  (nemusí být čtvercová!)
- nulová  $\mathbf{0}_{m \times n}$  (krátce jen  $\mathbf{0}$ ):  $a_{ij} = 0$  pro všechna  $i, j$
- jednotková  $\mathbf{I}_n$  (krátce jen  $\mathbf{I}$ ): čtvercová diagonální s  $a_{ij} = 1$  pro všechna  $i$
- horní [dolní] trojúhelníková:  $a_{ij} = 0$  pro  $i > j$  [ $i < j$ ] (nemusí být čtvercová!)

## Binární operace s maticemi a skaláry

- Součin matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a skaláru  $\alpha \in \mathbb{R}$  je matice  $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha = [\alpha a_{ij}]$ .  
Pro  $\alpha = -1$  píšeme  $\alpha\mathbf{A} = -\mathbf{A}$ .
- Součet matic  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je matice  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .  
Rozdíl matic:  $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
- Součin matic  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  je matice  $\mathbf{AB} = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

Vlastnosti maticového součinu:

- asociativní:  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- distributivní se sčítáním:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$  a  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$
- není komutativní (může být  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ )!

# Transpozice

**Transpozice** matice  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je matice

$$\mathbf{A}^T = [a_{ji}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

- pozor:  $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ : matice  $\mathbf{A}$  je **symetrická**
- $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ : matice  $\mathbf{A}$  je **antisymetrická**

# Inverze

Když matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  splňují

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$$

tak  $\mathbf{A}$  je **levá inverze** matice  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{B}$  je **pravá inverze** matice  $\mathbf{A}$ .

- Pravá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé řádky.
- Levá inverze matice existuje, právě když matice má lin. nezávislé sloupce.
- Když pravá nebo levá inverze existuje, nemusí být jediná.

Když existuje pravá i levá inverze matice, jsou si rovny a jsou jediné:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \mathbf{YA} \quad \implies \quad \mathbf{X} = \mathbf{YAX} = \mathbf{Y}$$

Tato (oboustranná) **inverze** se značí  $\mathbf{A}^{-1}$ .

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- matice má inverzi (= je **regulární**)  $\Leftrightarrow$  má l.n. sloupce  $\Leftrightarrow$  má l.n. řádky
- inverze je involuce:  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- pozor:  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

# Matice s jedním sloupcem nebo jedním řádkem

- **Sloupcový vektor** je jiný název pro matici s jediným sloupcem (prvek  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ).
- **Řádkový vektor** je jiný název pro matici s jediným řádkem (prvek  $\mathbb{R}^{1 \times n}$ ).

## Úmluva

Ztotožníme prostor  $\mathbb{R}^n$  s prostorem  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ :

$$\mathbf{x} = \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\text{uspořádaná } n\text{-tice}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{matice } n \times 1} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$$

Příklady:

- Pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  je  $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$
- Pro  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  je  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
- Pro  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  je  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$  (standardní skalární součin)
- Pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  a  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  je  $\mathbf{xy}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (vnější součin, dyáda)

# Lineární podprostory a zobrazení

---



- **Lineární kombinace** vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  je vektor

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k$$

pro nějaké  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

- **Lineární obal**

$$\text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$$

vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  je množina všech jejich lineárních kombinací.

- Množina  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je **(lineární) podprostor**  $\mathbb{R}^n$ , jestliže je uzavřená na lineární kombinace (tj. každá lineární kombinace libovolných vektorů z  $X$  patří do  $X$ ).
- **Báze** podprostoru  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je množina vektorů z  $X$ , jejichž lineární obal je  $X$ .  
**Trvzení:** Počet vektorů báze je stejný pro každou bázi.
- Počet vektorů báze je **dimenze** podprostoru  $\dim X$ .

# Lineární zobrazení

Zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je **lineární**, jestliže

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ .

## Věta

Zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je lineární, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

pro nějakou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Matice  $\mathbf{A}$  je zobrazením  $\mathbf{f}$  určena jednoznačně.

**Tvrzení:** Matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých zobrazení:

Pro  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  a  $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{B}\mathbf{y}$  je

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

## Sloupcový a řádkový pohled na součin $\mathbf{Ax}$

- Pomocí **sloupců**  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  matice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

Vektor  $\mathbf{Ax}$  je lineární kombinace sloupců  $\mathbf{A}$  s koeficienty  $x_i$ .

- Pomocí **řádků**  $\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_m^T$  matice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

Složky vektoru  $\mathbf{Ax}$  jsou skalární součiny řádků  $\mathbf{A}$  a vektoru  $\mathbf{x}$ .

$$\text{rng } \mathbf{A} = \{ \mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Interpretace:

- Obor hodnot (range, image) lineárního zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$  ( $\text{rng } \mathbf{A} = \mathbf{f}(\mathbb{R}^n)$ )
- Množina všech vektorů  $\mathbf{y}$  takových, že  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  má řešení
- Lineární obal sloupců matice  $\mathbf{A}$

**Hodnost** matice  $\mathbf{A}$  je číslo

$$\text{rank } \mathbf{A} = \dim \text{rng } \mathbf{A}.$$

## Věta

$$\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$$

Důkaz není triviální!

$$\text{null } \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Interpretace:

- Množina vektorů, které se zobrazí na nulový vektor
- Množina řešení soustavy lineárních rovnic  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$
- Množina všech vektorů kolmých na každý řádek matice  $\mathbf{A}$

# Existence/jednoznačnost řešení soustav lineárních rovnic

Pro matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  jsou tvrzení pod sebou ekvivalentní:

## Prostor obrazů

- $\text{rng } \mathbf{A} = \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$  má řešení pro každé  $\mathbf{y}$
- $\text{rank } \mathbf{A} = m$
- zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$  je surjektivní
- $\mathbf{A}$  má lin. nezávislé řádky
- $\mathbf{A}$  má pravou inverzi
- $\mathbf{AA}^T$  je regulární

## Nulový prostor

- $\text{null } \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  má jediné řešení  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\text{rank } \mathbf{A} = n$
- zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$  je injektivní
- $\mathbf{A}$  má lin. nezávislé sloupce
- $\mathbf{A}$  má levou inverzi
- $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  je regulární

# Rank-nullity theorem

## Věta

Pro každou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  platí

$$\underbrace{\dim \text{rng } \mathbf{A}}_{\text{rank } \mathbf{A}} + \dim \text{null } \mathbf{A} = n.$$

Důkaz je v každé učebnici lin. algebry.

- Protože  $\text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{A}^T$ , platí také  $\dim \text{rng } \mathbf{A}^T + \dim \text{null } \mathbf{A} = n$ .
- $\dim \text{null } \mathbf{A}$  je míra degenerace lineárního zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$
- Počet lineárně nezávislých řešení soustavy  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je  $n - \text{rank } \mathbf{A}$

# Afinní podprostory a zobrazení

---



# Afinní kombinace a podprostory

- **Afinní kombinace** vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  je

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k \quad \text{kde } \alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$$

- **Afinní obal**

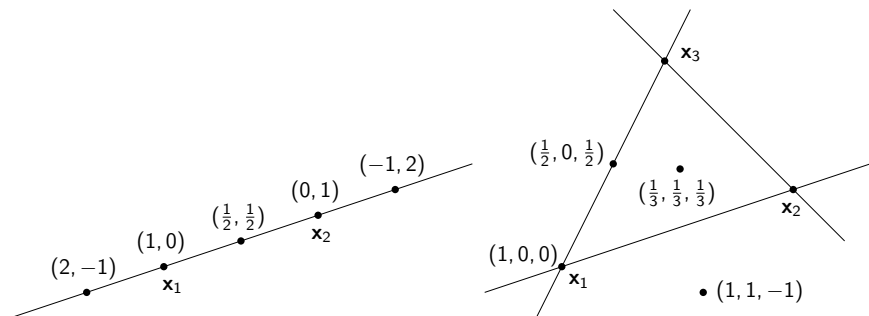
$$\text{aff}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$$

vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  je množina všech jejich afinních kombinací.

- Množina  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je **afinní podprostor**, jestliže je uzavřená na afinní kombinace.

Afinní kombinace nezávisí na počátku:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \cdots + \alpha_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0) &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\mathbf{x}_0 \\ &= \alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\end{aligned}$$



## Charakterizace afinního podprostoru

Pro  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  označíme  $X + \mathbf{x} = \mathbf{x} + X = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in X\}$ .

### Věta

- Je-li  $X$  lineární podprostor a  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , pak  $X + \mathbf{x}$  je afinní podprostor.
- Je-li  $A$  afinní podprostor a  $\mathbf{x} \in A$ , pak  $A - \mathbf{x}$  je lineární podprostor.
- Je-li  $A$  afinní podprostor a  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , pak  $A - \mathbf{x} = A - \mathbf{y}$ .

**Dimenze afinního podprostoru**  $A$  definována jako  $\dim X$ .

### Věta

Množina  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  je afinní podprostor právě tehdy, když je množinou řešení nějaké lineární soustavy, tj.  $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ .

## Příklady afinních podprostorů:

- bod (dimenze 0)  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- přímka (dimenze 1)  $\{ \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$
- rovina (dimenze 2)  $\{ \mathbf{x} + \alpha \mathbf{s} + \beta \mathbf{t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$
- nadrovina (dimenze  $n - 1$ )  $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b \}$

# Afinní zobrazení

Zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je **afinní**, pokud

$$\mathbf{f}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k) = \alpha_1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$$

pro všechna  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$ .

## Věta

Zobrazení  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  je afinní, právě když

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

pro nějaké  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Matice  $\mathbf{A}$  a vektor  $\mathbf{b}$  jsou zobrazením  $\mathbf{f}$  určeny jednoznačně.

| <b>Lineární</b>                            | <b>Afinní</b>                               |
|--|---|
| lineární kombinace                         | afinní kombinace                            |
| lineární obal                              | afinní obal                                 |
| lineární podprostor $X$                    | afinní podprostor $X + \mathbf{x}_0$        |
| řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ | řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  |
| null $\mathbf{A}$                          | $\mathbf{x}_0 + \text{null } \mathbf{A}$    |
| lineární zobrazení $\mathbf{Ax}$           | afinní zobrazení $\mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ |

# Ortogonalita

---

# Délky, úhly, vzdálenosti v $\mathbb{R}^n$

Pro vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ :

- **Standardní skalární součin:**  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
- **Eukleidovská norma** (délka vektoru):  $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$
- Úhel  $\varphi$  mezi vektory:  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$

Jestliže  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ , vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  jsou **ortogonální**, což značíme také  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  (nevylučuje možnost  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nebo  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ).

- **Eukleidovská metrika** (vzdálenost bodů):  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$



# Ortonormální množina vektorů

- Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  je **normalizovaný**, jestliže  $\|\mathbf{u}\| = 1 = \mathbf{u}^T \mathbf{u}$ .
- Množina vektorů  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  je **ortonormální**, jestliže

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

## Věta

Ortonormální množina vektorů je lineárně nezávislá.

**Důkaz:** Vynásob rovnost  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$  skalárně vektorem  $\mathbf{u}_j$ .

Tedy musí být  $m \geq n$ .

## Věta

Nechť jsou  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  ortonormální. Nechť  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$ . Pak  $\alpha_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{x}$ .

**Důkaz:** Vynásob rovnost  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$  skalárně vektorem  $\mathbf{u}_j$ .

## Matice s ortonormálními sloupci

Když vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  tvoří sloupce matice  $\mathbf{U}$ , pak

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases} \quad \text{je totéž jako} \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$$

Jestliže  $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$ , pak lineární zobrazení  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}\mathbf{x}$  zachovává skalární součin:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{y}) = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T (\mathbf{U}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{y} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$$

Tedy zobrazení  $\mathbf{f}$  zachovává délky, úhly a vzdálenosti  $\Rightarrow$  je to **isometrie**.

# Ortogonalní matice

## Věta

Jestliže matice  $\mathbf{U}$  je čtvercová, pak tato tvrzení jsou ekvivalentní:

- $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}$  (tj.  $\mathbf{U}$  má ortonormální sloupce)
- $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$  (tj.  $\mathbf{U}$  má ortonormální řádky)
- $\mathbf{U}$  je regulární a splňuje  $\mathbf{U}^T = \mathbf{U}^{-1}$

Čtvercová matice s ortonormálními sloupci se nazývá **ortogonální** matice.

Protože

$$\det(\mathbf{U}^T \mathbf{U}) = (\det \mathbf{U}^T)(\det \mathbf{U}) = (\det \mathbf{U})^2 = \det \mathbf{I} = 1$$

jsou dvě možnosti pro  $\det \mathbf{U}$ :

- $\det \mathbf{U} = 1$ : isometrie  $\mathbf{f}$  je **rotace**, matice  $\mathbf{U}$  se nazývá **rotační** nebo **speciální ortogonální**
- $\det \mathbf{U} = -1$ : isometrie  $\mathbf{f}$  je složení rotace a zrcadlení

## Příklady ortogonálních matic:

- **Rotační matice v  $\mathbb{R}^2$**

Rotace kolem počátku o úhel  $\varphi$  proti směru hodinových ručiček:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

- **Householderova matice** (elementární reflektor)

Zrcadlení podle nadroviny procházející počátkem s normálou  $\mathbf{u}$  kde  $\|\mathbf{u}\| = 1$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$$

- **Permutační matice**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Její determinant je rovný znaménku permutace.

## Jak parametrizovat rotace? [nepovinné, pro zájemce]

Maticová exponenciála:  $e^{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^0}{0!} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots$  (konvence:  $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ ,  $0! = 1$ )

- Je-li  $\mathbf{A}$  diagonalizovatelná, pak  $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{V} \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) \mathbf{V}^{-1}$  kde  $\mathbf{A} = \mathbf{V} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{V}^{-1}$  je spektrální rozklad matice  $\mathbf{A}$  (kde obecně  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ )
- V Matlabu: `expm(A)`

### Věta

Matice  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je rotační, právě když existuje antisymetrická matice  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (tj.  $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ ) tak, že  $\mathbf{U} = e^{\mathbf{S}}$ .

- Pro  $n = 2$  a  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{bmatrix}$  je  $e^{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix}$
- Pro  $n = 3$  a  $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$

**Tvrzení:** Každá rotace v  $\mathbb{R}^3$  kolem počátku je rotace kolem nějaké přímky procházející počátkem o nějaký úhel (axis-angle representation). Označíme-li  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ , pak přímka má normálu  $\mathbf{s}/\|\mathbf{s}\|$  a úhel je  $\|\mathbf{s}\|$ .

# QR rozklad matice

## Věta (Plný QR rozklad)

Každou matici  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  lze rozložit na součin

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR}$$

kde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  je ortogonální a  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  je horní trojúhelníková.

**Důkaz:** pomocí algoritmu. (Algoritmy na QR rozklad jsou založeny buď na Gram-Schmidtově ortogonalizaci nebo Givensových hrotacích rotace nebo Householderových reflexích.)

- V Matlabu:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A})$

**Redukovaný QR rozklad:**  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ortogonální a  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  horní trojúhelníková

- V Matlabu:  $[\mathbf{Q}, \mathbf{R}] = \text{qr}(\mathbf{A}, 0)$

# Ortogonalní podprostory

- Vektor  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  je ortogonální na podprostor  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  (značíme  $\mathbf{y} \perp X$ ), jestliže  $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$  pro všechna  $\mathbf{x} \in X$ .
- Podprostory  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou ortogonální (značíme  $X \perp Y$ ), jestliže  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  pro všechna  $\mathbf{x} \in X$  a  $\mathbf{y} \in Y$ .

**Tvrzení:**  $X \perp Y \Rightarrow X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$

- **Ortogonalní doplněk** podprostoru  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  je množina

$$X^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \perp X\}$$

**všech** vektorů ortogonálních na  $X$ .

**Tvrzení:**  $X^\perp$  je podprostor.

## Věta

- $\dim X + \dim X^\perp = n$
- $X \perp Y, \dim X + \dim Y = n \implies Y = X^\perp$
- $(X^\perp)^\perp = X$

**Myšlenka důkazu:** Z definic  $\text{rng}$  a  $\text{null}$  plyne, že  $X = \text{rng}(\mathbf{A}^T) \Rightarrow X^\perp = \text{null } \mathbf{A}$ . První tvrzení je pak rank-nullity theorem. Druhé a třetí tvrzení celkem snadno plynou z prvního.

# Vztahy mezi čtyřmi základními podprostory matice

Matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  definuje čtyři **základní podprostory**:

- $\text{rng } \mathbf{A} = \{ \mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \subseteq \mathbb{R}^m$  lineární obal sloupců
- $\text{null } \mathbf{A} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^n$  všechny vektory kolmé na řádky
- $\text{rng}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{A}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \} \subseteq \mathbb{R}^n$  lineární obal řádků
- $\text{null}(\mathbf{A}^T) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \} \subseteq \mathbb{R}^m$  všechny vektory kolmé na sloupce

## Věta

- $(\text{rng } \mathbf{A})^\perp = \text{null}(\mathbf{A}^T)$
- $(\text{null } \mathbf{A})^\perp = \text{rng}(\mathbf{A}^T)$

**Důkaz** plyne okamžitě z definic podprostorů a z rovnosti  $(X^\perp)^\perp = X$ .



# Komplementární podprostory

Podprostory  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  nazveme **komplementární**, jestliže

$$X \cap Y = \{\mathbf{0}\}, \quad \dim X + \dim Y = n.$$

## Věta

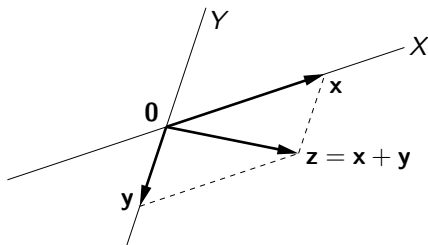
Nechť  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$  jsou komplementární podprostory. Pak pro každý vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$  existuje právě jedna dvojice vektorů  $\mathbf{x} \in X$  a  $\mathbf{y} \in Y$  tak, že  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

**Důkaz jednoznačnosti:** Nechť pro  $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X$  a  $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$  je  $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}'$ , tj.  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{y} - \mathbf{y}'$ .

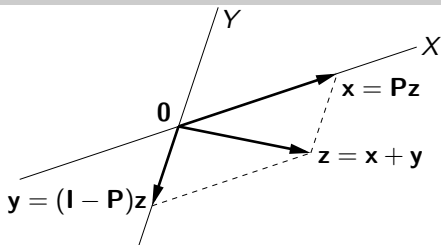
• Pak  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \in X$  a  $\mathbf{y} - \mathbf{y}' \in Y$ , tedy  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  a  $\mathbf{y} - \mathbf{y}'$  jsou v  $X \cap Y$ .

• Protože  $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$ , je  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{y} - \mathbf{y}' = \mathbf{0}$ .

**Důkaz existence:** Dokaž, že sjednocení báze  $X$  a báze  $Y$  je báze  $\mathbb{R}^n$ . Pak napiš  $\mathbf{z}$  v této bázi.



# Obecná projekce



Vektor  $x$  se nazývá **projekce** vektoru  $z$  na podprostor  $X$  podél podprostoru  $Y$ . Projekce je tedy transformace  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  taková, že  $x = f(z)$ .

## Věta

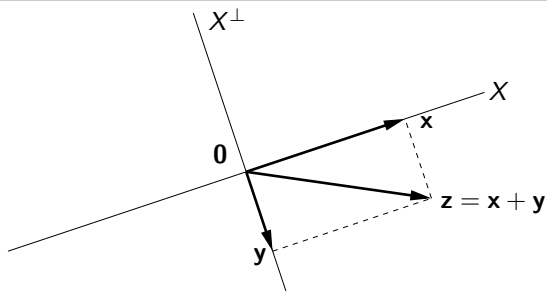
Projekce je lineární transformace.

**Důkaz:** Necht'  $x \in X$ ,  $y \in Y$  a  $z = x + y$ . Pak  $\alpha x \in X$ ,  $\alpha y \in Y$  a  $\alpha z = \alpha x + \alpha y$ . Díky jednoznačnosti jiný rozklad není. Proto  $f(\alpha z) = \alpha x$ . Podobně dokážeme  $f(z + z') = f(z) + f(z')$ .

Tedy existuje **projektor**  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tak, že  $f(z) = Pz$ . Vlastnosti projektoru:

- $\text{rng } P = X$
- $\text{null } P = Y$
- $P^2 = P$  (charakterizuje projektory)

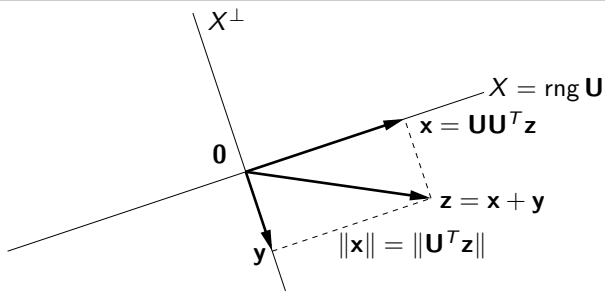
# Ortogonalní projekce



Je-li  $X$  podprostor, pak  $X^\perp$  je k němu komplementární (viz slide 26).

- Tedy pro každé  $z$  jednoznačně existují  $x \in X$  a  $y \in X^\perp$  tak, že  $z = x + y$ .
- Projekce na  $X$  podél  $X^\perp$  se nazývá **ortogonální projekce** na  $X$ .
- Tedy  $x \in X$  je ortogonální projekce vektoru  $z$  na  $X$ , jestliže  $(z - x) \perp X$ .

# Ortogonalní projekce na podprostor zadaný ortonormální bází



## Věta

Nechť  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ . Ortogonalní projekce vektoru  $\mathbf{z}$  na podprostor  $X = \text{rng } \mathbf{U}$  je

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{z}.$$

**Důkaz:** Máme dokázat, že  $\mathbf{x} \in \text{rng } \mathbf{U}$  a  $(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \perp \text{rng } \mathbf{U}$ .

- $\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{z} \in \text{rng } \mathbf{U}$  platí z definice  $\text{rng}$ .
- $(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{z}) \perp \text{rng } \mathbf{U}$  znamená  $\mathbf{U}^T(\mathbf{z} - \mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ , což platí neboť  $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$ .

Matice  $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{U}^T$  je **ortogonální projektor** na podprostor  $X$ .

**Tvrzení:** Splňuje navíc (kromě vlastností obecného projektoru)  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ .

## Nejbližší bod k podprostoru

Hledáme bod  $\mathbf{x}$  na podprostoru  $X$ , který je nejbližší danému bodu  $\mathbf{z}$ . Tedy

$$\mathbf{x} \in \underset{\mathbf{x}' \in X}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}'\|$$

### Věta

Bod  $\mathbf{x}$  je nejbližší bodu  $\mathbf{z}$  na podprostoru  $X$ , právě když  $(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \perp X$ .

**Důkaz směru**  $\Leftarrow$ : z Pythagorovy věty.

Délka ort. projekce  $\mathbf{z}$  na  $X$  je rovna vzdálenosti bodu  $\mathbf{z}$  od  $X^\perp$ :

$$\|\mathbf{U}\mathbf{U}^T\mathbf{z}\| = \|\mathbf{U}^T\mathbf{z}\|$$