0/1 úloha batohu

Každý předmět lze použít nejvýše 1 krát.

Máme vybrat vhodnou podmnožinu předmětů splňující zadání úlohy. Každé podmnožině lze přiřadit charakteristický vektor z hodnot 0/1 délky N. Pozice ve vektoru odpovídá předmětu, 0 resp. 1 odpovídá nepřítomnosti resp. přítomnosti předmětu v této podmnožině. Binárních vektorů délky N je celkem 2^N, systematické probírání všech možných podmnožin bude mít exponenciální asymptotickou složitost, nehodí se.

DP poskytuje (pro relativně nevelké kapacity) výhodnější postup.

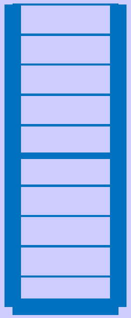
0/1 úloha batohu

Příklad

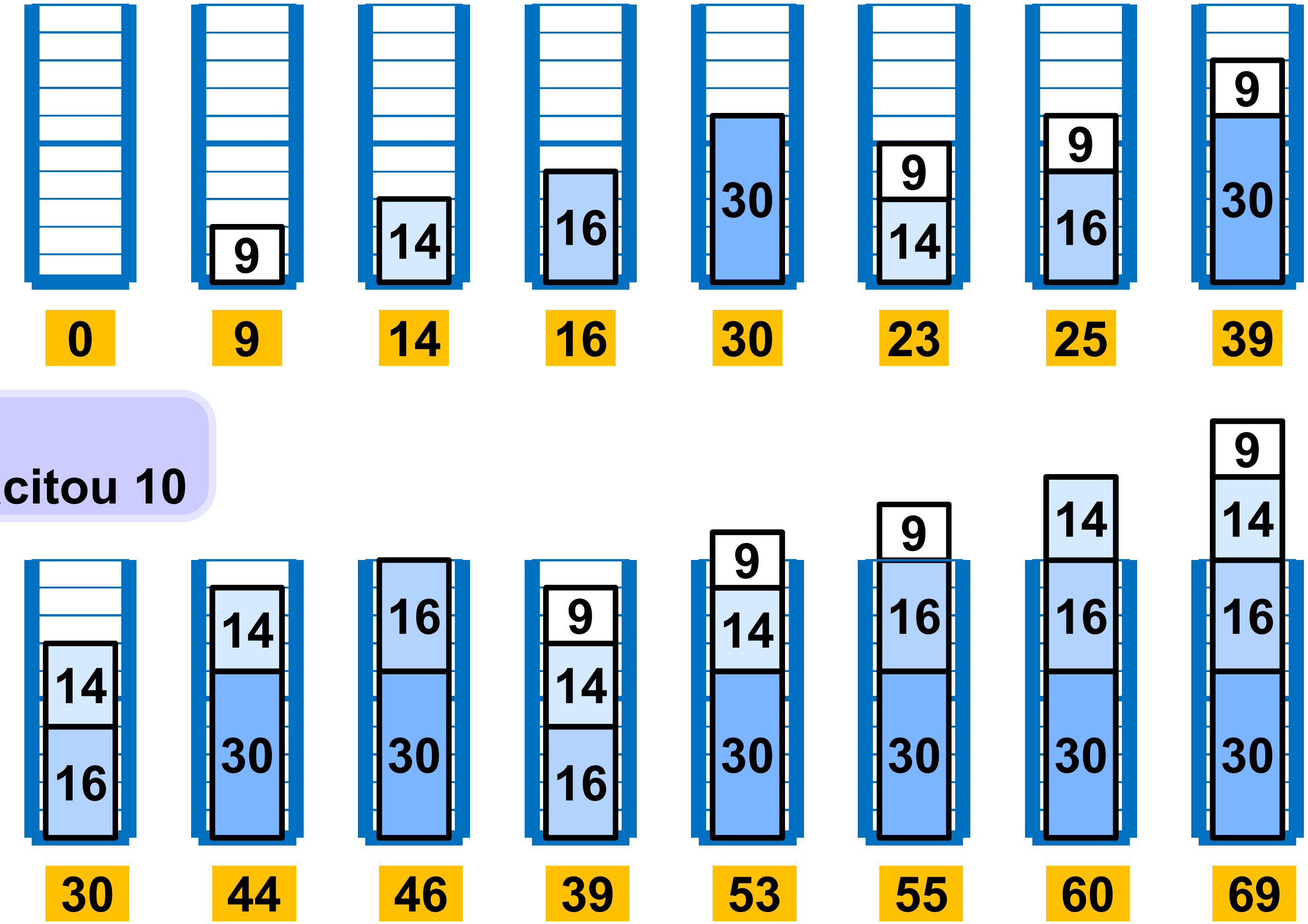
N = 4

Váha	Cena
2	9
3	14
4	16
6	30

Batoh
s kapacitou 10



Všech 16 podmnožin čtyř předmětů a jejich ceny



0/1 úloha batohu -- řešení

Použijeme K+1 batohů, o kapacitách 0, 1, 2, 3, ..., K.
Použijeme N+1 souborů předmětů.

Soubor 0 neobsahuje žádný předmět.
Soubor 1 obsahuje předmět 1.
Soubor 2 obsahuje předměty 1 a 2.
Soubor 3 obsahuje předměty 1, 2, 3.
...
Soubor N obsahuje předměty 1, 2, 3, ..., N.

Na pořadí předmětů nezáleží, je ale zafixované.

Pro každou kapacitu a pro každý soubor budeme řešit
stejnou úlohu metodou DP, v pořadí od menších hodnot k větším.

0/1 úloha batohu -- řešení

**Označme symbolem U(x, y) úlohu
se souborem předmětů 1, 2, ..., x a s kapacitou batohu y
a symbolem Opt(x, y) optimální řešení této úlohy.**

Pro řešení U(x,y) použijeme optimální řešení úloh U(x-1, _):

**Buď do Opt(x, y) zahrneme předmět x nebo jej nezahrneme.
V prvním případě použijeme hodnotu řešení pro batoh
s kapacitou menší o velikost váhy Vx, tedy hodnotu Opt(x-1, y-Vx),
ke které přičteme cenu Cx předmětu x.
V druhém případě beze změny použijeme hodnotu Opt(x-1, y).
Z obou hodnot vybereme tu výhodnější a dostáváme tak:**

$$\mathrm{Opt}(x, y) = \max(\mathrm{Opt}(x-1, y),\ \mathrm{Opt}(x-1, y-Vx) + Cx).$$

Dále zřejmě platí Opt(0, y) = Opt(x, 0) = 0, pro x = 0..N, y = 0..K.

0/1 úloha batohu -- řešení

Pro $x = 1..N$, $y = 0..K$:

$Opt(x, y) = \max(Opt(x-1, y),\ Opt(x-1, y-Vx) + Cx)$.
$Opt(0, y) = Opt(x, 0) = Opt(0, 0) = 0$.

Pokud $y-Vx < 0$, položíme $Opt(x, y-Vx) = -\infty$ (a netabelujeme).

Hodnoty Opt(x,y) tabelujeme ve 2D tabulce velikosti $(N+1)\times(K+1)$
s řádkovým indexem x (předměty)
a sloupcovým indexem y (kapacity menších batohů).

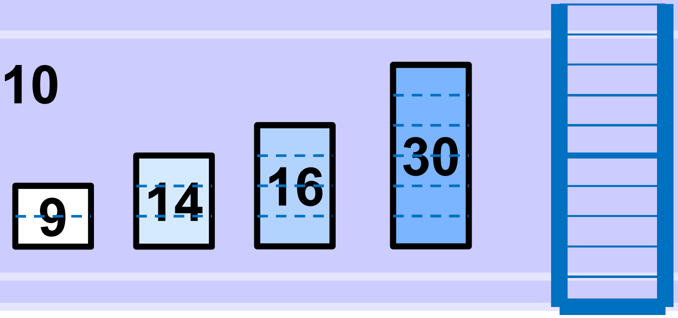
Pro rekonstrukci optimálního řešení použijeme tabulku
předchůdců stejné velikosti jako tabulku pro Opt(x, y).
Předchůdce leží vždy v předchozím řádku x-1, stačí registrovat
buď pozici y (beze změny) nebo pozici y-Vx (přidán předmět x).

0/1 úloha batohu

Příklad

N = 4 Kapacita = 10

Váha	2	3	4	6
Cena	9	14	16	30



Opt(x, y)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	9	9	9	9	9	9	9	9	9
2	0	0	9	14	14	23	23	23	23	23	23
3	0	0	9	14	16	23	25	30	30	39	39
4	0	0	9	14	16	23	30	30	39	44	46

Pred(x, y)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	7
3	0	1	2	3	0	5	2	3	4	5	6
4	0	1	2	3	4	5	0	7	2	3	4

Vyjádření jako optimální cesty v DAG

Uzly DAG budou jednotlivé hodnoty Opt(x, y), x = 0..N, y = 0..K,
celkem bude mít DAG (N+1)*(K+1) uzlů.
Do uzlu Opt(x, y) povede hrana

-- Opt(x-1, y) --> Opt(x, y)
ohodnocená 0 (žádný přidaný předmět),

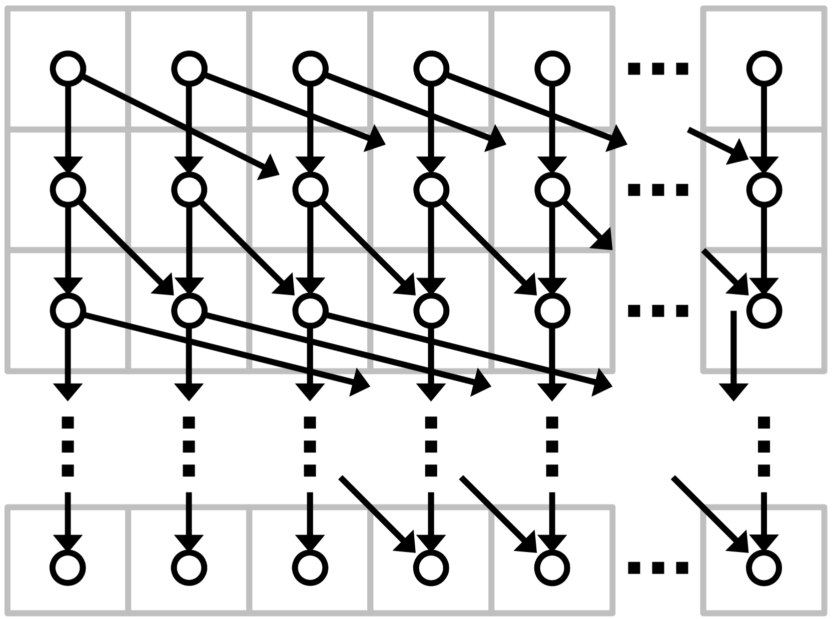
-- a pokud $y\text{-}Vx \geq 0$, také hrana
Opt(x-1, y-Vx) --> Opt(x, y)
ohodnocená cenou Cx (cenou přidaného předmětu x).

V takto zkonstruovaném DAG hledáme nejdelší (= nejcennější) cestu standardní DP metodou.

Jaké je topologické uspořádání tohoto DAG?

0/1 úloha batohu - topologické uspořádání DAG

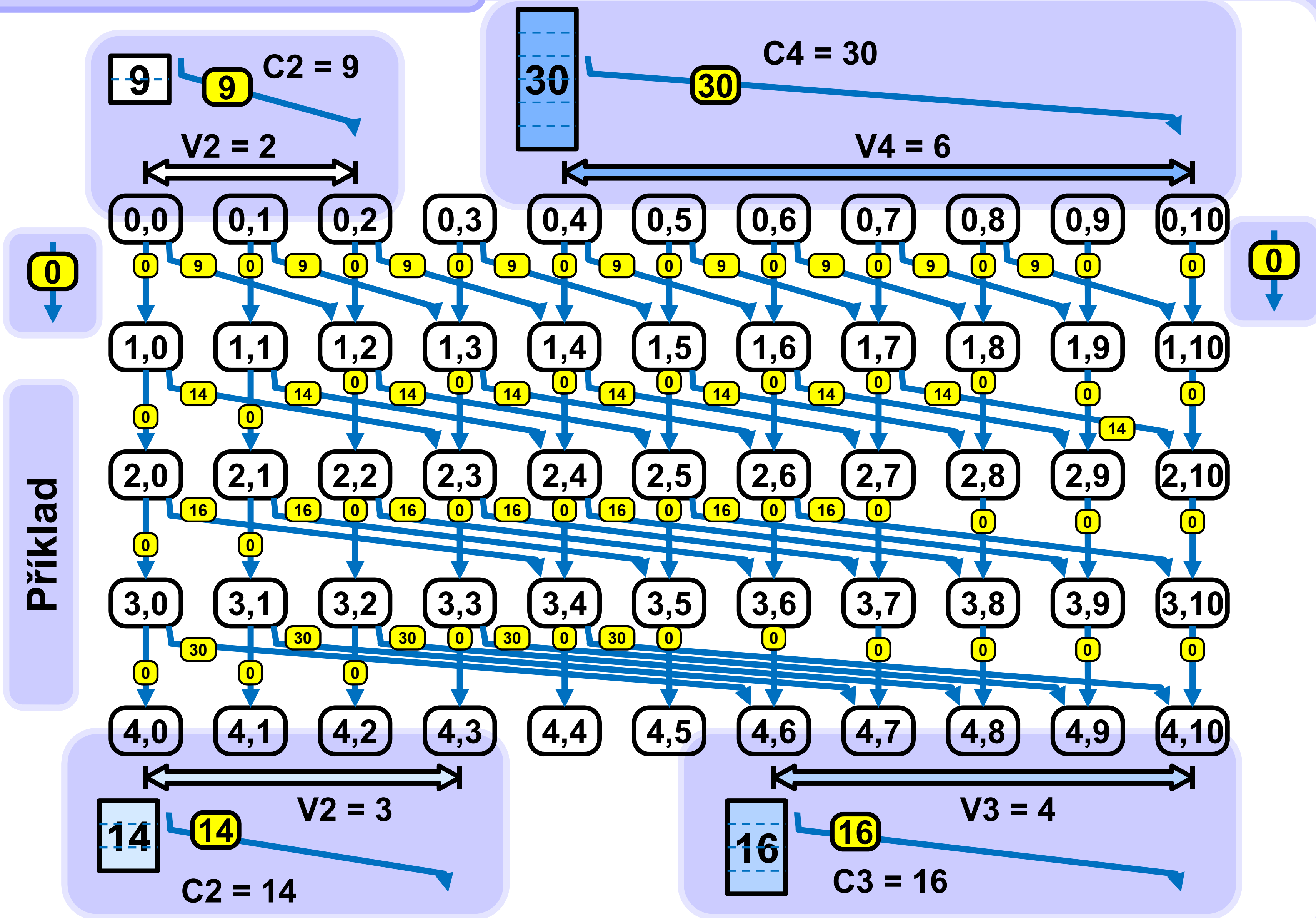
DAG můžeme uvažovat nakreslený formálně do DP tabulky, přičemž uzel Opt(x, y) leží v buňce s indexy x a y. Pak hrany DAG vedou vždy pouze z předchozího řádku do následujícího řádku. Pokud tento DAG procházíme shora po řádcích, to jest ve stejném pořadí, v němž vyplňujeme DP tabulku, respektujeme jeho topologické uspořádání.



V tomto případě není nutno uzly DAG v topologickém uspořádání uvažovat v jedné přímce, "tabulkové" uspořádání je přehlednější.

0/1 úloha batohu -- DAG

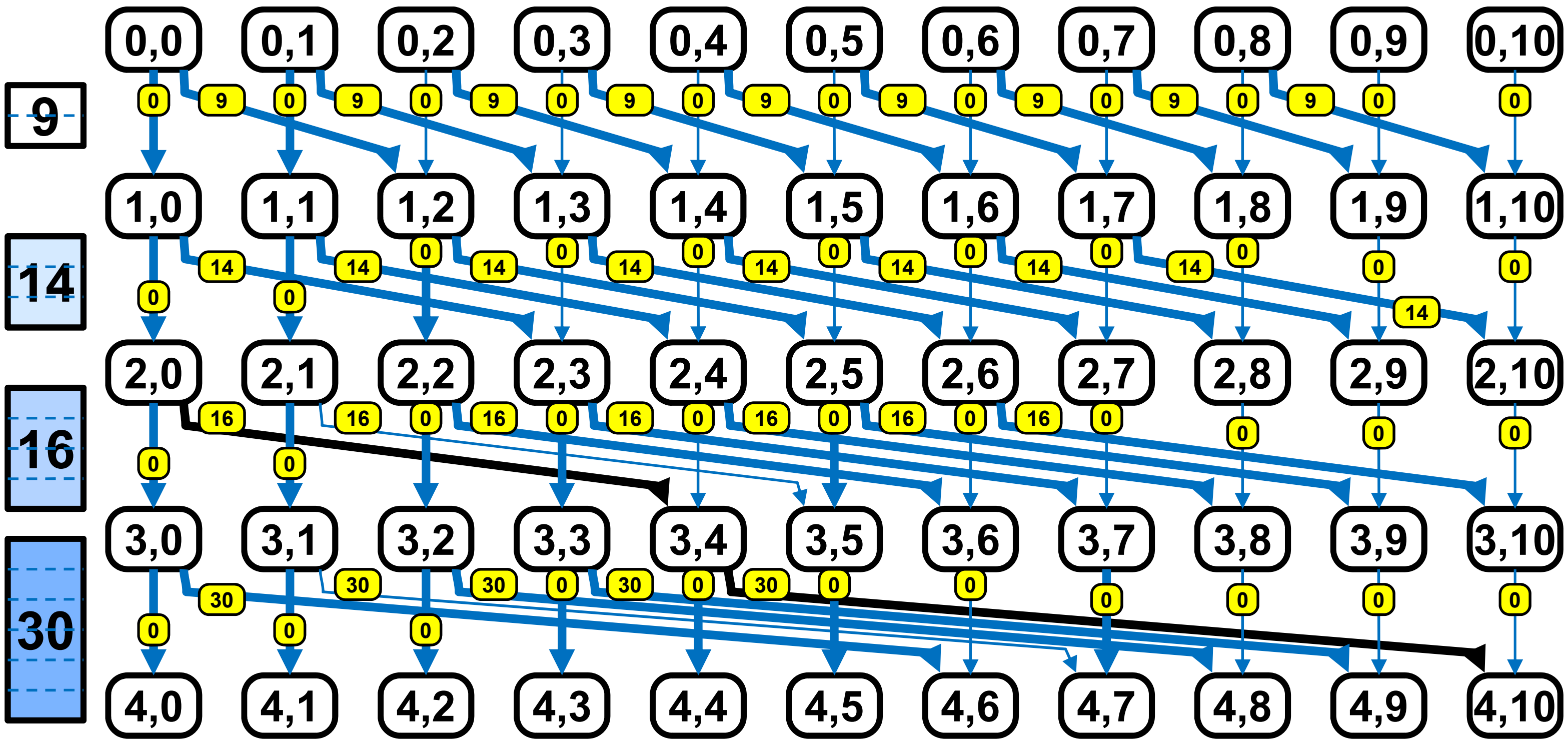
Příklad



0/1 úloha batohu -- rekonstrukce optimálního řešení pomocí tabulky předchůdců

Pred(x, y)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	1	2	0	1	2	3	4	5	6	7
3	0	1	2	3	0	5	2	3	4	5	6
4	0	1	2	3	4	5	0	7	2	3	4



0/1 úloha batohu

Asymptotická složitost

Tabulka ... Velikost ... (N+1)*(K+1) $\in \Theta$(N*K)
Vyplnění jedné buňky ... Θ(1)
Vyplnění tabulky ... Θ(N*K*1) = Θ(N*K).
Rekonstrukce optimálního řešení Θ(N).
Celkem ... Θ(N*K + N) = Θ(N*K).

DAG .... Uzlů ... (N+1)*(K+1) $\in \Theta$(N*K).
Hran ... nejvýše 2*(N+1)*(K+1), tj $\in$ O(N*K).
Nalezení optimální cesty ... Θ(uzlů+hran) = Θ(N*K).

Řešení obou variant úlohy batohu, neomezené i 0/1,
má asymptotickou složitost Θ(N*K).

Přitom zároveň platí:

Asymptotická složitost DP řešení je exponenciální vzhledem k délce řetězce definujícího kapacitu K.