Soutěžní úlohy ICPC CERC 2012 v Krakově.
Úlohy jsou pro pohodlí čtenáře zbaveny "pohádek" a je ponecháno jen abstraktní jádro.

A. Ve orientovaném grafu s $n \leq 20$ uzly, jehož všechny hrany jsou ohodnoceny kladnými čísly, definujeme cenu uzlu jako součet hodnot všech hran, které do uzlu vedou, zmenšený o součet hodnot všech hran, které vedou z uzlu ven. Dále pracujeme v krocích. V jednom kroku odstraníme z grafu libovolný uzel se zápornou hodnotou, odstraníme všechny s ním incidentní hrany a přepočteme hodnoty uzlů incidentních s odstraněnými hranami. Určete, zda existuje posloupnost $n-1$ kroků, po jejímž provedení zbyde v grafu jediný uzel s kladnou hodnotou.

B. První řádek matice A s k sloupci je vyplněn danou posloupností P délky k obsahující jedničky a nuly. Posloupnost začíná i končí 0. Další řádky matice vyplňujeme postupně odshora podle pravidel
A[r][s] = 0; if s = 0 or s = k–1
A[r][s] = A[r–1][s–1] xor A[r–1][s+1]; if s > 0 and s < k–1
Určete, zda je možné, aby A obsahovala nulový řádek. Počet řádků A není nijak omezen, $k \leq 200000$.

C. Je dána množina M řetězců délky 1 a 2 a dále řetězec R. Určete, jestli R může vzniknout zřetězením prvků M, přičemž každý prvek M lze použít libovoněkrát. Délka R nepřesáhne 50000.

D. Určete, jestli pro danou posloupnost P celých čísel platí, že každá její souvislá podposloupnost obsahuje alespoň jeden v ní unikátní prvek. Délka P nepřesáhne 200000.

E. Určete, zda řetězec T nad abecedou Σ = {a, b, ..., z} mohl vzniknout vložením dalších znaků Σ do daného řetězce P na libovolná místa. P je dán svým zápisem, T je dán množinou nejvýše 500 produkčních pravidel (gramatikou), z nichž každé je v jednom ze tvarů: 1. <X> = slovo nad Σ, 2. <X> = <Y>+<Z>.
<X>, <Y>, <Z> jsou libovolná slova nad abecedou {A, B, ..., Z}, znak '+' představuje zřetězení. Každé slovo <X> se vyskytuje na levé straně všech pravidel jen jedenkrát. Startovní pravidlo, od něhož konstrukce T začíná, je dáno.

F. Je dán neorientovaný souvislý multigraf G s hranami ohodnocenými nezápornými reálnými čísly. V G jsou vyznačeny dva různé uzly X, Y. Přidejte do grafu jeden uzel Z a alespoň jednu hranu vedoucí ze Z do některých jiných uzlů G. Ohodnoťte nezáporně přidané hrany tak, aby průměrná cena cesty ze Z do ostatních uzlů grafů byla co nejnižší, a přitom pro každý uzel $u \neq$ Z platilo, že nejlevnější cesta z u do A a také nejlevnější cesta z u do B nebude procházet uzlem Z.

G. V rovině je dána množina bodů M, každý bod je obarven jednou z k barev $2 \leq k \leq |M| \leq 200000$. Podmnožinu M nazveme solidní, pokud neobsahuje body všech k barev a leží uvnitř obdélníka, jehož jedna strana leží na ose x. Určete maximální možnou mohutnost solidní podmnožiny M.

H. V rovině jsou dány kružnice $K_p = (0,0, 20 \cdot p)$, p = 1, 2, ...10, a množina n bodů B_k, k = 1, 2, ..., n, $n \leq 1000000$. Pokud bod B_k leží vně K_{10}, je jeho hodnota nulová, jinak je rovna $11-q$, kde q je minimální takové číslo, že B_k leží na hranici nebo uvnitř kružnice K_q. Určete součet hodnot všech daných bodů.

I. Je dána množina P nejvýše 100 přímek v rovině a množina B nejvýše 50000 bodů v téže rovině. Určete, jestli každá oblast určená množinou P obsahuje alespoň jeden bod B. Oblast je každá maximální (a konvexní) část roviny, neobsahující žádný bod žádné přímky P. Žádné dvě přímky nesplývají, žádné tři přímky nemají společný bod a žádný bod B neleží na žádné přímce P.

J. Každý uzel orientovaného acyklického grafu G s nejvýše 100000 uzly a 100000 hranami je obarven jednou ze dvou barev. Jaké je nejmenší číslo F takové, že v některém topologickém uspořádání G existuje právě F dvojic sousedních uzlů, v nichž jsou uzly nestejné barvy? Sousedství uvažujeme podle uspořádání, nikoli podle hran.

K. Jsou dány dva neorientované stromy T1, T2, se stejným počtem listů L a každý s nejvýše 1000 uzly. Dále je dána množina hran H tak, že každá hrana H inciduje s jedním listem T1 a jedním listem T2 a každý list T1 i T2 inciduje s jedinou hranou H. Rozhodněte, zda takto vzniký graf obsahuje hamiltonovskou kružnici.