Níže uvedené úlohy představují přehled otázek, které se vyskytly v tomto nebo v minulých semestrech ve cvičení nebo v minulých semestrech u zkoušky. Mezi otázkami semestrovými a zkouškovými není žádný rozdíl, předpokládáme, že připravený posluchač dokáže zdárně zodpovědět většinu z nich.

Tento dokument je k dispozici ve variantě převážně s řešením a bez řešení.

Je to pracovní dokument a nebyl soustavně redigován, tým ALG neručí za překlepy a jazykové prohřešky, většina odpovědí a řešení je ale pravděpodobně správně :-).

-------------------------------------- COMPLEXITY ---

1.
Průnik množin $\Omega(2n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

a) obsahuje funkci $n/2$
b) obsahuje funkci $n + \log(n)$
c) obsahuje funkci n^2
d) obsahuje všechny funkce uvedené v a), b), c)
e) je prázdný

2.
Průnik množin $\Omega(n)$ a $O(n \cdot \log(n))$

1. obsahuje funkci $\log(n)$
2. obsahuje funkci $n/2$
3. obsahuje funkci n^2
4. je prázdný
5. není definován

3.
Průnik množin $\Omega(n \cdot \log(n))$ a $O(n^2/2)$

a) obsahuje funkci $n+n^2$
b) obsahuje funkci $\log(n)$
c) obsahuje funkci $n/2$
d) je prázdný
e) není definován

4.
Průnik množin $O(n^2)$ a $\Omega(n \cdot \log(n))$

a) obsahuje funkci $\log(n)$
b) obsahuje funkci $2 \cdot n$
c) obsahuje funkci $2 \cdot n^2$
d) je prázdný
e) není definován

5.
Datová struktura D obsahuje pouze jednosměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Odstranění posledního prvku seznamu je operací se složitostí

a) $O(1)$
b) $\Theta(1)$
c) $\Theta(\log_2(n))$
d) $\Omega(n)$
e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

6.
Datová struktura D obsahuje pouze obousměrně zřetězený spojový seznam s n prvky a ukazatel na první prvek seznamu. Asymptotická složitost operace vložení nového prvku do tohoto seznamu je v nejlepším případě

a) $O(0)$
b) $\Theta(1)$
c) $\Theta(\log_2(n))$
d) $\Omega(n)$
e) $\Omega(n \cdot \log_2(n))$

7.
The set $O(n \cdot \log(n))$ is a subset of

a) $\Theta(n \cdot \log(n))$
b) $\Omega(n \cdot \log(n))$
c) $O(\log(n))$
d) $O(n^2)$
e) $O(n)$

8.
For function $f(x)$ it holds: $f(x) \in O(x^2 \cdot \log_2(x))$ and $f(x) \in \Omega(x^2)$. These conditions are valid just for one function in the following list:

a) $f(x) = x^3$
b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
c) $f(x) = x^2$
d) $f(x) = 2^x$

9.
For function $f(x)$ it holds: $f(x) \in \Omega(x^2)$ and $f(x) \in O(x^3)$. These conditions are valid just for one function in the following list:

a) $f(x) = x^2 \cdot \log_2(x)$
b) $f(x) = x \cdot \log_2(x)$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = x + 1$

10.
Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x^2 \in \Omega(x + \log_2(x))$
b) $x^2 \in \Omega(x \cdot \log_2(x))$
c) $x^2 \in \Theta(x + \log_2(x))$
d) $x^2 \in O(x^2 - \log_2(x))$
e) $x^2 \in \Theta(x^2 + \log_2(x))$

11.
Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za $c+\log_2(N)$ milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

a) $\Omega(N^2)$
b) $\Omega(c \cdot N^2)$

c) $\Theta(N \cdot \log_2(N))$
d) $O(c \cdot \log_2(N))$
e) $\Theta(c+\log_2(N))$

12.
Algoritmus A projde celým polem délky N a prvek s indexem k zpracuje za c·k milisekund. Konstanta c je stále stejná. Asymptotická složitost zpracování celého pole je

a) $O(N \cdot \log_2(N))$
b) $\Theta(N^2)$
c) $O(k \cdot N)$
d) $\Theta(c \cdot N)$
e) $\Theta(c \cdot k)$

13.
Algoritmus A provede jeden průchod polem s *n* prvky. Při zpracování prvku na pozici *k* provede *k*+*n* operací. Operační (=asymptotická) složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(k+n)$
b) $\Theta((k+n) \cdot n)$
c) $\Theta(k^2+n)$
d) $\Theta(n^2)$
e) $\Theta(n^3)$

14.
Algoritmus A probírá postupně všechny prvky v dvourozměrném poli o velikosti $n \times n$ a s každým prvkem provádí další (nám neznámou) akci, jejíž složitost je $\Theta(\log_2(n))$. Celková asymptotická složitost algoritmu A je tedy

a) $\Theta(n \cdot \log_2(n))$
b) $\Theta(n^2)$
c) $\Theta(n^3)$
d) $\Theta(n^2+\log_2(n))$
e) $\Theta(n^2 \cdot \log_2(n))$

15.
Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in \Omega(g(x))$. Z toho plyne, že

a) $f(x) \in O(g(x))$
b) $f(x) \in \Theta(g(x))$
c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
e) $g(x) \in O(f(x))$

16.
Pro rostoucí spojité fukce f(x), g(x) platí $f(x) \in O(g(x))$. Z toho plyne, že

a) $f(x) \in \Theta(g(x))$
b) $f(x) \in \Omega(g(x))$
c) $g(x) \in \Theta(f(x))$
d) $g(x) \in \Omega(f(x))$
e) $g(x) \in O(f(x))$

17.

Pokud funkce f roste asymptoticky stejně rychle jako funkce g (tj. $f(x) \in \Theta(g(x))$), platí právě jedno následující tvrzení. Které?

a) jsou-li v bodě x definovány obě funkce, pak $f(x) = g(x)$
b) ani poměr $f(x)/g(x)$ ani poměr $g(x)/f(x)$ nekonverguje k nule s rostoucím x
c) rozdíl $f(x) - g(x)$ je kladný pro každé $x > y$, kde y je nějaké dostatečně velké číslo
d) obě funkce f i g jsou definovány jen pro nezáporné argumenty
e) nic z předchozího

18.

Právě jeden z následujících výroků je nepravdivý. Označte jej.

a) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - x)$
b) $x \cdot \log_2(x) \in O(x^2 - \log_2(x))$
c) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x^2 - \log_2(x))$
d) $x \cdot \log_2(x) \in \Omega(x + \log_2(x))$
e) $x \cdot \log_2(x) \in \Theta(x \cdot \log_2(x^2))$

19.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.

a) $x^2 \cdot 2^x \in$ ....$((\ln(x^2))^2 + 2^x)$
b) $(\ln(x^2))^2 + 2^x \in$ ....$(x^2 + \ln(x^2))$
c) $2^x \cdot (\ln(x))^{-1} \notin$ ....$(2^x \cdot (\ln(x^2))^{-1})$

20.

V následujících vztazích doplňte na prázdná místa (........) symboly O nebo Θ nebo Ω tak, aby vznikla pravdivá tvrzení. Je-li možností více, uveďte je všechny, nehodí-li se ani jeden symbol, prázdné místo proškrtněte.
a) $x^2 \cdot \ln(x^2) \in$ ....$(x^2 + \ln(x))$
b) $x^3 + \ln(x^2) \in$ ....$(x^3 + 2^x)$
c) $x^3 \cdot \ln(x^2) \notin$ ....$(\ln(x^2) + 2^x)$

21.

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Theta(h(x))$, $h(x) \notin \Omega(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.

22.

Uveďte příklad tří rostoucích funkcí reálné proměnné $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, pro které současně platí všechny tři následující vztahy:
$f(x) \notin O(g(x))$, $g(x) \notin \Omega(h(x))$, $h(x) \notin \Theta(f(x))$
Pokud taková trojice funkcí nemůže existovat, napište krátké zdůvodnění, proč.