Příklady

Karel Richta a kol.

Přednášky byly připraveny s pomocí materiálů, které vyrobili Marko Berezovský, Petr Felkel, Josef Kolář, Michal Píše a Pavel Tvrdík

Katedra počítačů
Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

Datové struktury a algoritmy, B6B36DSA
02/2020, Příklady pro 1.test

https://cw.fel.cvut.cz/wiki/courses/b6b36dsa/start

Evropský sociální fond
Praha & EU: Investujeme do vaší budoucnosti

Opakování: Příklad na rekurzi

Mějme rekurzivní funkci fff definovanou následovně:

```
void fff(int x) {
        if (x < 0) return;
        abc(x);
        fff(x-1);
        fff(x-2);
}
```

Nechť je funkce fff volána s parametrem 2, tj.: fff(2);. Funkce abc(x) je pak celkem volána (platí právě jedna z možností):

a) 1 krát

b) 3 krát

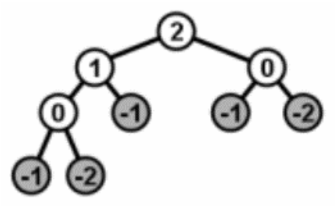
c) 4 krát

d) 7 krát

e) 8 krát

Příklad na rekurzi - řešení

Strom rekurzivního volání funkce fff vidíme na obrázku (není součástí zadání úlohy).

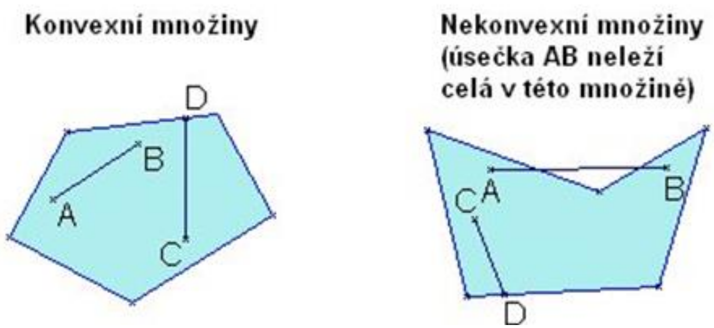



```
void fff(int x) {
        if (x < 0) return;
        abc(x);
        fff(x–1);
        fff(x–2);
}
```

V každém uzlu je vepsána hodnota parametru x při odpovídajícím volání funkce fff(x). Při volání, kdy je hodnota x je menší než 0 (x = –1 nebo x = –2) , nastává okamžitý návrat z funkce fff a funkce abc v takovém případě již volána není. To znamená, že funkce fff bude volána jen v bílých uzlech stromu na obrázku, jež jsou dohromady 4. Platí varianta c) 4x.

Příklad na indukci

- Dokažte indukcí, že konvexní obálka n > 2 bodů má nejvýše n hran? Pomůcka: Konvexní obálka n bodů je nejmenší možný konvexní k-úhelník, který obsahuje všech n bodů. Konvexní k-úhelník je takový k-úhelník, kde pokud vezmeme libovolné dva body a spojíme je, tak celá spojnice leží uvnitř tohoto útvaru.



Příklad na indukci - řešení

- Postupujeme indukcí podle počtu bodů n:
- Počáteční krok:
  - nejmenší smysluplné n je 3, kdy konvexní obal tří bodů má právě 3 hrany (tvoří trojúhelník).
- Indukční krok spočívá v ověření, že pokud má konvexní obal n bodů nejvýše n hran, pak po přidání dalšího bodu bude mít nejvýše n+1 hran. Mohou nastat tři situace:
  - nový bod padne dovnitř konvexního obalu. Pak se ale počet hran konvexního obalu nezmění a platí, že konvexní obal n+1 uzlů má nejvýše n hran (zde dokonce jen n).
  - Pokud by nový bod padnul právě na hranici konvexního obalu, pak rozdělí některou hranu na dvě a konvexní obal n+1 uzlů bude mít nejvýše n+1 hran.
  - Poslední případ je, když nový bod leží mimo původní konvexní obal. Nový konvexní obal vytvoříme tak, že ke stávajícímu obalu přidáme dvě hrany, tvořící tečny současného obalu a vypustíme původní část obalu přemostěnou novou dvojicí. Vypuštěná část má nejméně jednu hranu, čili přidáním dvou nových a vypuštěním jedné staré přidáme nejvýše jednu hranu (můžeme ale také nepřidat žádnou, nebo dokonce jejich počet zmenšit, pokud má původní spojnice dvě a více hran).

q.e.d.

Příklad na dobu výpočtu

Který z následujících dvou fragmentů programu proběhne rychleji? Kolikrát bude v každém z řešení proveden příkaz sum += i+j, tj. tělo cyklu?

```
int n = 100;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < i; j++)
sum += i+j;
```

```
int n = 75;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < n; j++)
sum += i+j;
```

Příklad na dobu výpočtu - řešení

- V prvním fragmentu proběhne vnější cyklus 100-krát, vnitřní však proběhne nejprve 0-krát, pak jednou, dvakrát a nakonec 99-krát. Tělo vnitřního cyklu se tedy provede:

  0 + 1 + 2 + ... + 99 = (100/2)*(0+99) =

  = 50 * 99 = 4950-krát.

```
int n = 100;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < i; j++)
sum += i+j;
```

- Ve druhém fragmentu není počet provádění vnitřního cyklu závislý na proměnné vnějšího cyklu, vnější cyklus proběhne 75-krát a v jeho těle pokaždé proběhne vnitřní cyklus rovněž 75-krát. Celkem se tedy tělo vnitřního cyklu provede: 75 * 75 = 5625-krát.

```
int n = 75;
int sum = 0;
for (i = 0; i < n; i++)
for (j = 0; j < n; j++)
sum += i+j;
```

- Rychleji proběhne první fragment.

Příklad na asymptotickou složitost

Substituční metodou ověřte, zda pro:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 & \text{pro } n \geq 4 \\ 1 & \text{pro } n < 4 \end{cases}$$

platí, že: $T(n) \in O(n^2)$.

Příklad na asymptotickou složitost

Substituční metodou ověřte, zda pro:

$$T(n) = \begin{cases} 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 & \text{pro } n \geq 4 \\ 1 & \text{pro } n < 4 \end{cases}$$

platí, že: $T(n) \in O(n^2)$.

Řešení:

Z definice $O(T(n))$ musí platit: $\exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : T(n) \leq c \cdot n^2$. To chceme dokázat indukcí pro libovolné n.

Počáteční krok: Pro n = 1 triviálně platí, že $T(1) = 1 \in O(1^2) = O(1)$. Obdobně ověříme i pro $n \in \{2,3,4\}$.

Indukční předpoklad: Nechť dokazovaný vztah platí pro instanci o velikosti $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, tj. $T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) \leq c \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2$.

Indukční krok: Provedeme substituci, odstranění dolní celé části a další úpravy:

$$T(n) = 2T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + n^2 \leq 2 \cdot c \cdot \lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2 + n^2 \leq 2 \cdot c \left(\frac{n}{4}\right)^2 + n^2 = \left(\frac{c+8}{8}\right) \cdot n^2 \leq c \cdot n^2$$

Poslední nerovnost platí pro všechna n a $c \geq \frac{8}{7}$.

Příklad na asymptotickou složitost

Zjistěte asymptotickou složitost:

$$T(1) = 1$$

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$

mistrovskou metodou (pomoci Master teorému). Pečlivě zkontrolujte a zapište všechny předpoklady této věty!

Příklad na asymptotickou složitost - řešení

Abychom mohli použít mistrovskou větu, musí mít rekurzivní rovnost správný tvar:

$T(n) = aT(n/b) + f(n)$

To zde platí pro a=2 a b=2. Pak musíme porovnat:

$n^{\lg 2}$ (tj. n) a n^2.

Zřejmě $f(n) = n^2 = \Omega(n^{\lg 2+e}) = \Omega(n^{1+1}) = \Omega(n^2)$, pro $e = 1 > 0$. To by ukazovalo na třetí variantu mistrovské věty, ale musí ještě platit:

$a * f(n/b) \leq c * f(n)$ pro pro nějaké $c < 1$ a dostatečně velká n.

Dosadíme-li za a, b a f(n):

$2 * f(n/2) \leq c * f(n)$ pro dostatečně velká n, tj.:

$2 * (n/2)^2 = n^2/2 \leq c * n^2$ a to platí např. pro c=1/2.

Platí tedy třetí možnost mistrovské věty a $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n^2)$.

The End