Alternativní algoritmy prohledávání stavového prostoru

Michal Pěchouček

Department of Cybernetics
Czech Technical University in Prague

http://labe.felk.cvut.cz/~pechouc/kui/alter-noinfo.pdf

Constraint satisfaction problems (CSPs)

Mějme standardní prohledávací problém:

- **stav** je "black box" – libovolná datová struktura, která podporuje funkce `goal_test`, `eval`, `successor`

Problém splnění omezujících podmínek

Constraint satisfaction problems (CSPs)

Mějme standardní prohledávací problém:

- **stav** je "black box" – libovolná datová struktura, která podporuje funkce `goal_test`, `eval`, `successor`

V problému splnění omezujících podmínek je pak

- **stav** definován pomocí *proměnných* X_i nabývajících *hodnot* ze specifické *domény* D_i (oboru hodnot)
- **goal_test** je definován jako množina *omezení*, které specifikují možné kombinace hodnot pro podmnožiny proměnných

Constraint satisfaction problems (CSPs)

Mějme standardní prohledávací problém:

- **stav** je "black box" – libovolná datová struktura, která podporuje funkce `goal_test`, `eval`, `successor`

V problému splnění omezujících podmínek je pak

- **stav** definován pomocí *proměnných* X_i nabývajících *hodnot* ze specifické *domény* D_i (oboru hodnot)
- **goal_test** je definován jako množina *omezení*, které specifikují možné kombinace hodnot pro podmnožiny proměnných

jedná se o jednoduchý příklad popisu problému pomocí *formálního jazyka*

Umožňuje použití *obecného* (*general-purpose*) algoritmu s většími výpočetními možnostmi než standardní prohledávací algoritmy

Příklad: SUDOKU

- http://www.websudoku.com/
- Každá Sudoku má jedno unikátní logické řessení, kterého lze dosáhnout logicky, bez hádání.
- Každý řádek, každý sloupec i každá buňka 3x3 musí obsahovat všech 9 číslic

				9		3		
	2		6		1	5	9	
3			5		8		2	4
	9					4	8	
6			2		9			1
	5	2					3	
9	7		1		5			3
	3	8	7		4		1	
		5		8				

Příklad: SUDOKU

- http://www.websudoku.com/
- Každá Sudoku má jedno unikátní logické řesšení, kterého lze dosáhnout logicky, bez hádání.
- Každý řádek, každý sloupec i každá buňka 3x3 musí obsahovat všech 9 číslic

				9		3		
	2		6		1	5	9	
3			5		8		2	4
	9					4	8	
6			2		9			1
	5	2					3	
9	7		1		5			3
	3	8	7		4		1	
		5		8				

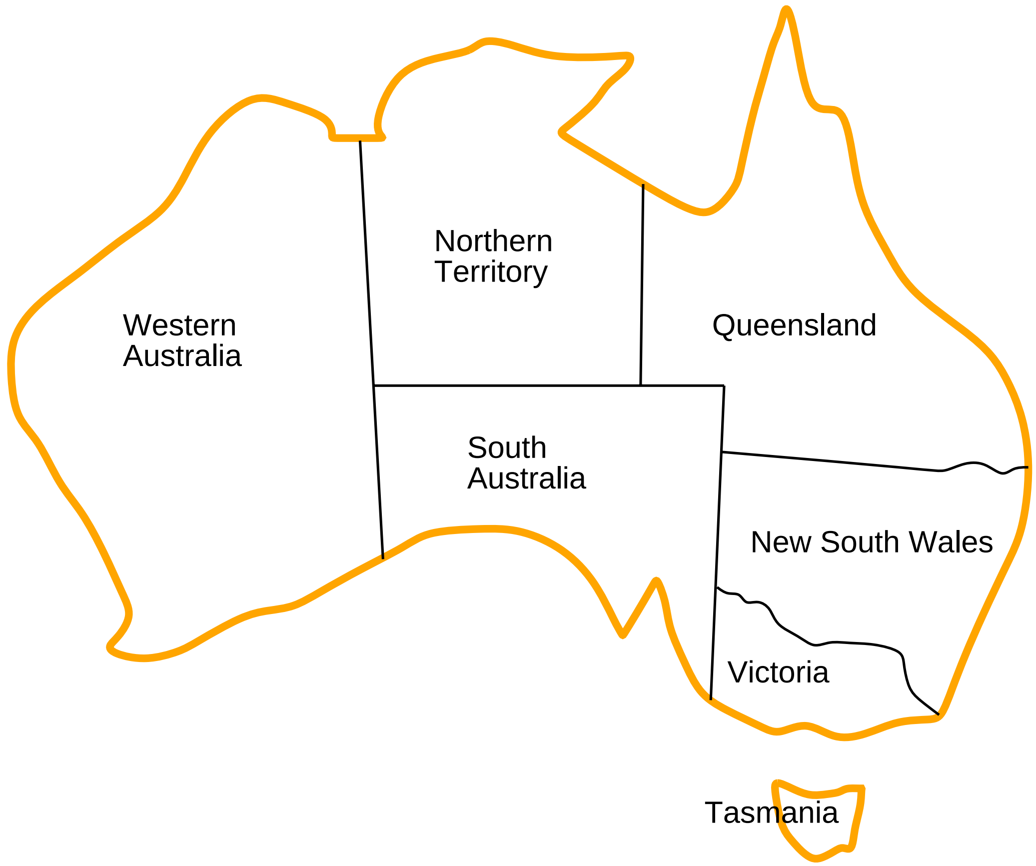
Proměnné $X_{1,1}, ...X_{9,9}$

Domény $D_i = \{1, .., 9\}$

Omezení: $X_{1,1} \neq X_{1,2}, ..., X_{1,1} \neq X_{1,9}, ...$ ve sloupcích, řádcích a blocích

Řešení: úplné přiřazení hodnot všem proměnným za splnění omezení

Příklad: Obarvení mapy



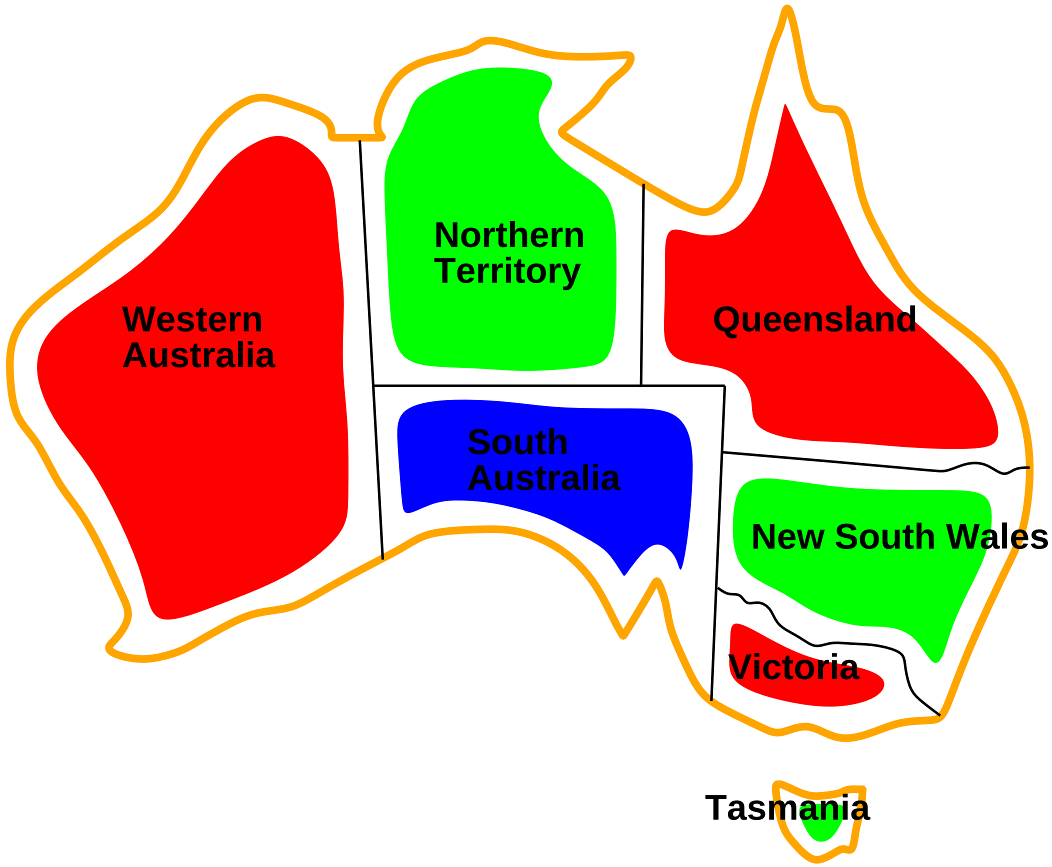
Příklad: Obarvení mapy

Proměnné WA, NT, Q, NSW, V, SA, T

Domény $D_i = \{red, green, blue\}$

Omezení: sousední oblasti se musejí odlišovat barvami e.g., $WA \neq NT$ (pokud to reprezentace umožňuje), nebo $(WA, NT) \in \{(red, green), (red, blue), (green, red), (green, blue), \ldots\}$

Příklad: Obarvení mapy

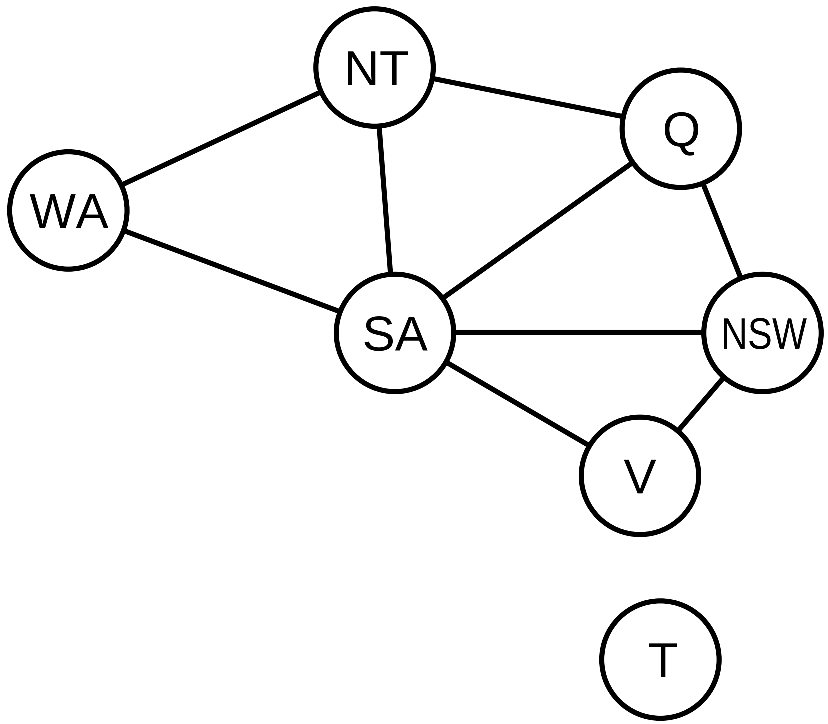


Řešení je přiřazení barev, které splňují daná omezení, např.,
$\{WA = red, NT = green, Q = red, NSW = green, V = red, SA = blue, T = green\}$

Graf Omezení

Binární CSP: každé omezení specifikuje vztah mezi maximálně dvěmi proměnnými

Graf Omezení: uzly jsou proměnné, hrany jsou omezení



Obecný CSP algoritmus používá grafovou strukturu za účelem urychlení procesu prohledávání. např. umožní detekovat, že Tasmania je nezávislý subproblem!

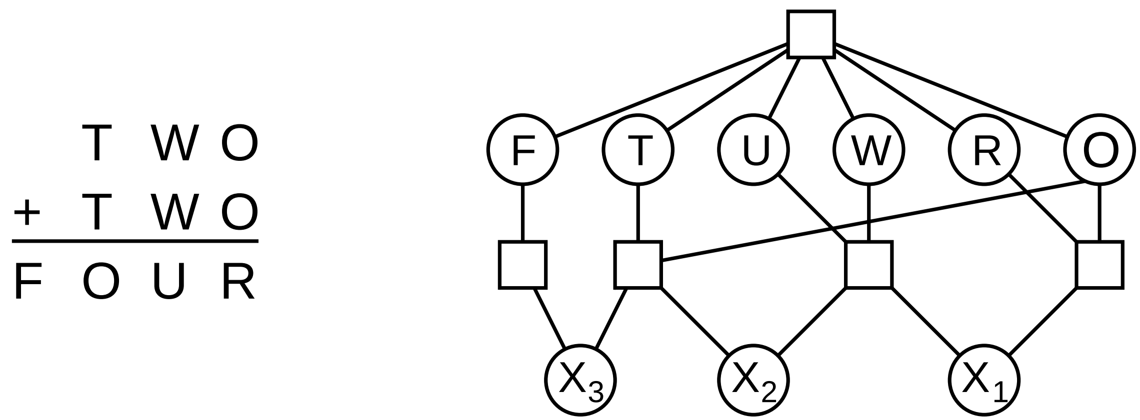
Variace CSPs

- **Diskrétní proměnné:**
  - z konečné domény velikosti $d \implies O(d^n)$ pro všechna přiřazení
    - např., Boolean CSPs, incl. Boolean satisfiability (NP-complete)
  - z nekonečné domény (integers, strings, ...)
    - např., rozvrhování, proměnné pro každý start/end den pro každou úlohu
    - potřeba zavedení **jazyka omezení**, např., $StartJob_1 + 5 \leq StartJob_3$
    - **lineární** omezení jsou řešitelná, **nelineární** omezení jsou nerozhodnutelná
- **Spojité proměnné**
  - např.: start/end čas pro práci Hubblova Teleskopu
  - lineární omezení jsou řešitelná v polynomiáním čase pomocí LP metod

Variace CSPs

- **Unární** omezení pracuje výhradně s jednou proměnnou,
  e.g., $SA \neq green$
- **Binární** omezení pracuje s dvojicí proměnných,
  např., $SA \neq WA$
- **Omezení vyššího řádu** zahrnuje 3 a více proměnných,
  např., cryptaritmetika, sudoku, omezení relace mezi sloupci
- **Preference** (soft constraints), např., red je lepší než $green$
  často reprezentované pomocí ceny za každé přiřazení hodnoty proměnné
  $\longrightarrow$ vede na problémy optimalizace za omezujících podmínek
  (constrained optimization problems)

Příklad: Cryptarithmetic



(a) (b)

Proměnné: $F\ T\ U\ W\ R\ O\ X_1\ X_2\ X_3$
Domény: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Omezení

$\texttt{alldiff}(F, T, U, W, R, O)$

$O + O = R + 10 \cdot X_1$, etc.

Problémy CSP v reálném světě

- Přiřazovací (assignment) problémy
  např., kdo učí jaký předmět
- Rozvrhovací (timetabling) problémy
  např., jaký předmět se učí kdy a kde?
- Rozvrhovací (Factory scheduling) problém
  jak narozvrhovat vhodné operace na vhodné stroje ve vhodný čas
  při zachování vzájemné provázanosti strojů i operací
- Konfigurační problém
  problém sestavení hardwaru, problém konfigurace sítě
- Transportní problém
  problém rozvrhování průběžných logistických operací
- Problém prostorového uspořádání (Floorplanning)

Mnohé reálné problémy obsahují proměnné s oborem reálných čísel

Specifikace prohledávacího algoritmu pro CSP

Začněme s nejjednodušším algoritmem a postupně ho zlepšíme

Stavy jsou definovány pomocí dosud přiřazených hodnot proměnným

- **Počáteční stav**: prázdné přiřazení, $\emptyset$
- **Operátor expanze**: přiřadí hodnotu jedné nepřiřazené proměnné
  tak, aby nedošlo ke konfliktu se současným přiřazením.
  $\Longrightarrow$ vrátí FAIL když nelze expandovat
- **Goal test**: aktuální přiřazení je úplné

Specifikace prohledávacího algoritmu pro CSP

Začněme s nejjednodušším algoritmem a postupně ho zlepšíme

Stavy jsou definovány pomocí dosud přiřazených hodnot proměnným

- **Počáteční stav**: prázdné přiřazení, $\emptyset$
- **Operátor expanze**: přiřadí hodnotu jedné nepřiřazené proměnné
  tak, aby nedošlo ke konfliktu se současným přiřazením.
  $\Longrightarrow$ vrátí FAIL když nelze expandovat
- **Goal test**: aktuální přiřazení je úplné

Vlastnosti:
– tento algoritmus funguje pro všechny CSP
– každé řešení se nachází v hloubce n s n proměnnými
  $\Longrightarrow$ lze použít depth-first search
– cesta není důležitá
– faktor větvení v hloubce l je $b = (n - l)d$, tedy $n!d^n$ uzlů!!!!

Backtracking search (zpětné prohledávání)

- Backtracking search – prohledávání založené na zpětném vyhledávání, nebo na inteligentním navracení se

Přiřazení proměnných je **komutativní**, t.j.,

$$[\text{nejprve } WA = red \text{ pak } NT = green]$$

$$\text{je stejné jako}$$

$$[\text{nejprve } NT = green \text{ pak } WA = red]$$

Je třeba přiřadit právě jednu proměnnou v každém uzlu
$\Longrightarrow$ $b = d$ a existuje d^n uzlů kde n je velikost domény

Prohledávání do hloubky pro CSPs s přiřazováním jedné proměnné se nazývá **backtracking search**

Backtracking search je základní neinformovaný algoritmus pro řešení CSPs

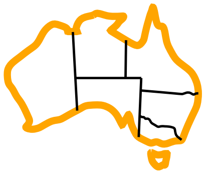
Může řešit problém n-královen s přibližně $n \approx 25$

Zpětné prohledávání

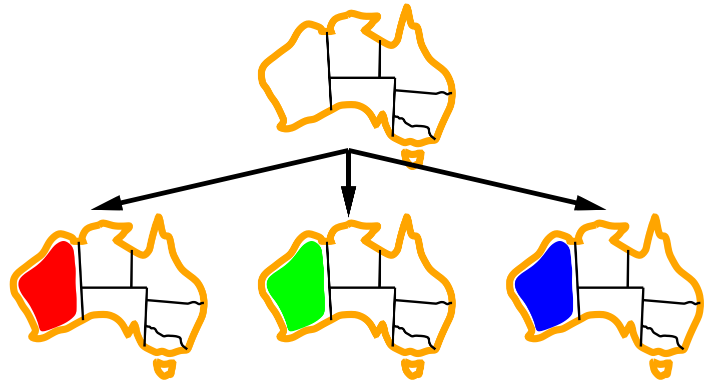
```
function BACKTRACKING-SEARCH(csp) returns solution/failure
   return RECURSIVE-BACKTRACKING({ }, csp)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp) returns soln/failure
   if assignment is complete then return assignment
   var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[csp], assignment, csp)
   for each value in ORDER-DOMAIN-VALUES(var, assignment, csp) do
      if value is consistent with assignment given CONSTRAINTS[csp] then
         add {var = value} to assignment
         result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp)
         if result ≠ failure then return result
         remove {var = value} from assignment
   return failure
```

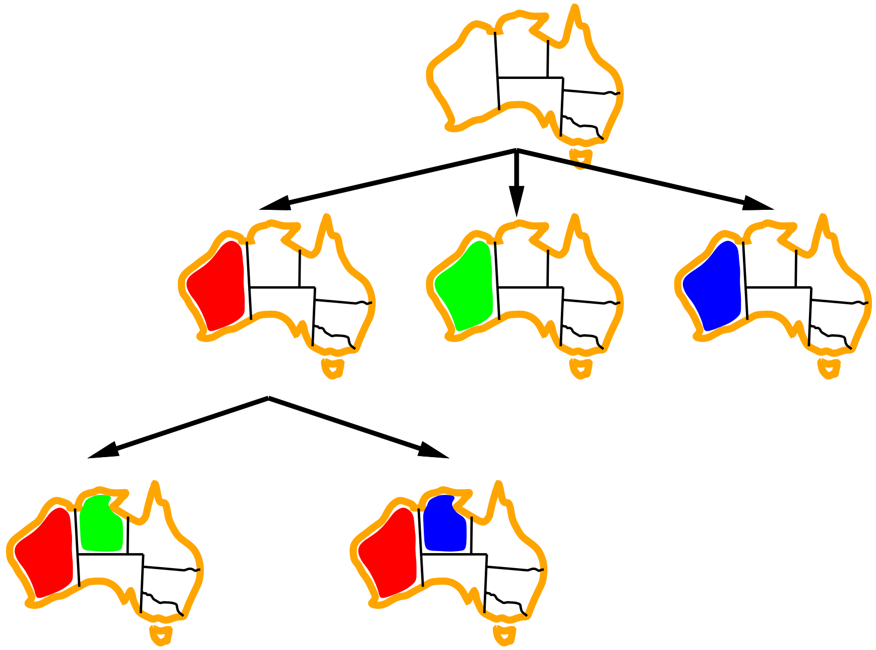
Zpětné prohledávání



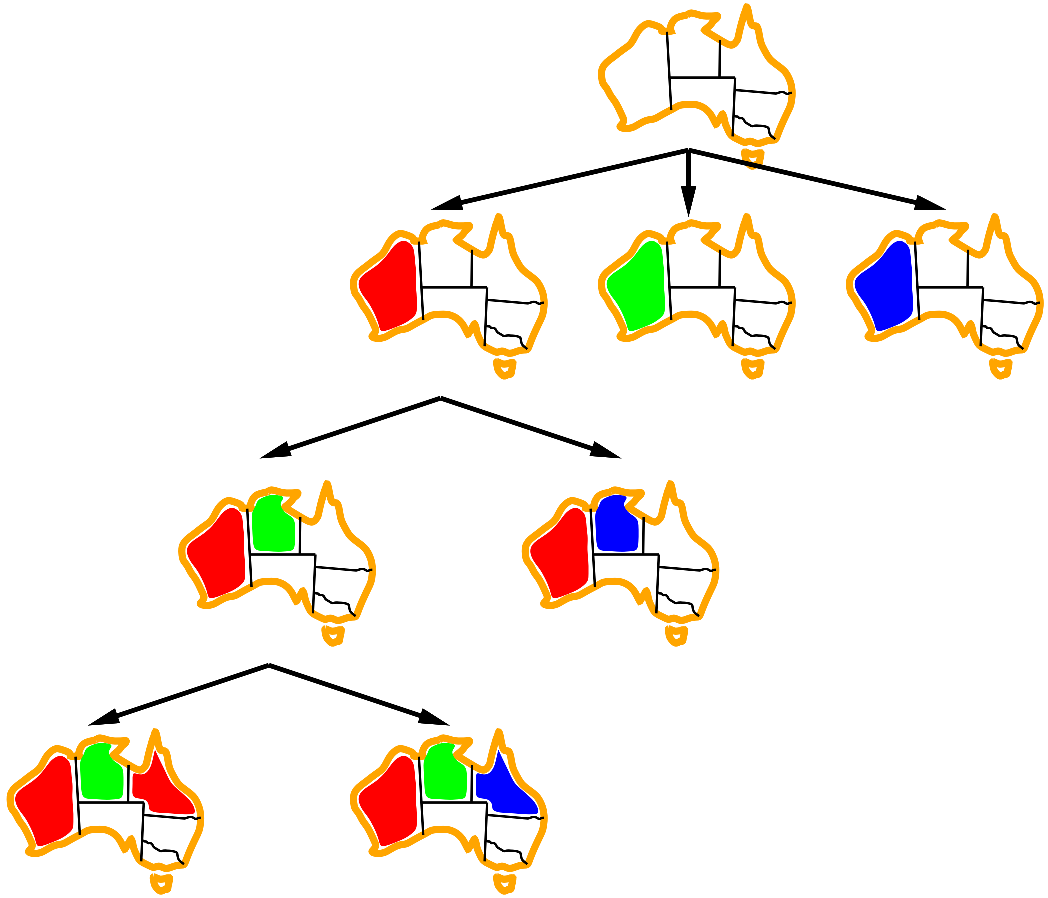
Zpětné prohledávání



Zpětné prohledávání



Zpětné prohledávání



Zlepšení efektivity zpětného prohledávání

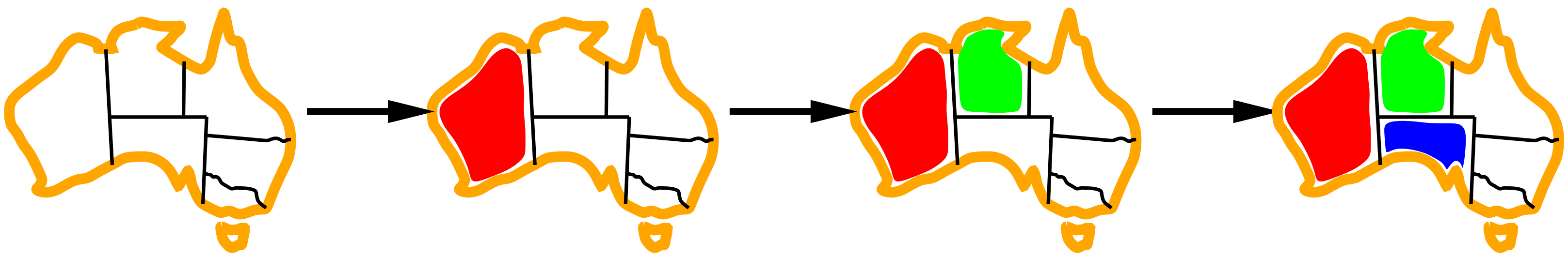
Obecné metody lze zlepšit, bude-li se algoritmus schopen správně rozhodnout:

1. kterou proměnnou přiřadit v příštím kole?
2. v jakém pořadí bychom měli zkoušet hodnoty?
3. můžeme dopředu předvídat nevyhnutelné selhání přiřazení (failures)?
4. lze využít předem známá struktura problému?

Minimální zbývající hodnota (MRV)

Minimální zbývající hodnota (**Minimum remaining values**):

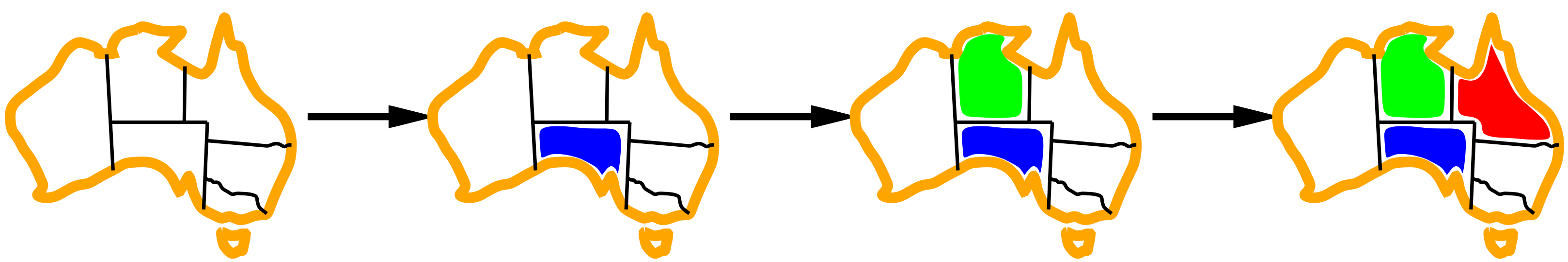
- vyber proměnnou s nejmenším množstvím přípustných hodnot,
- nazývána rovněž *most constrained variable* nebo *fail-first* heuristika.



Heuristika podle stupně omezení

Alternativa k MRP je heuristika podle stupně omezení (**degree heuristic**:)

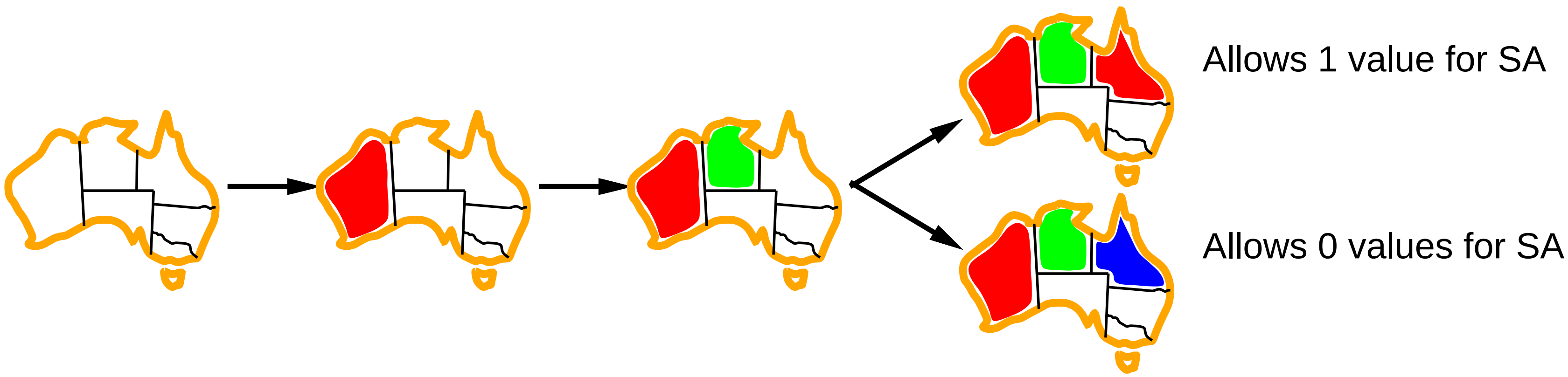
1. vyber proměnnou s nejvíce omezeními na zbývajících proměnných.
2. Omezuje faktor větvení na budoucích proměnných.



Nejméně omezující hodnota

pro danou proměnnou vyber hodnotu, která ji nejméně omezuje (**least-constraining value**):

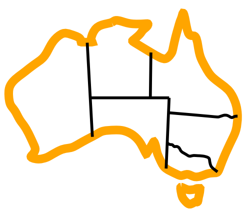
- tato hodnota vyřadí nejméně hodnot pro ostatní proměnné



Za kombinace těchto heuristik lze řešit až 1000 královen

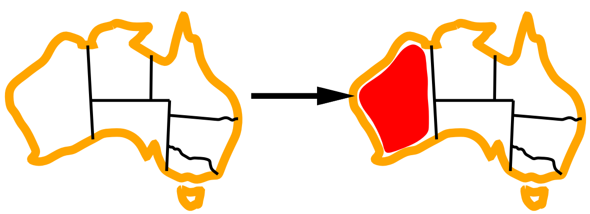
Hlavní myšlenka: Pamatovat si přípustné zbývající hodnoty pro nepřiřazené proměnné

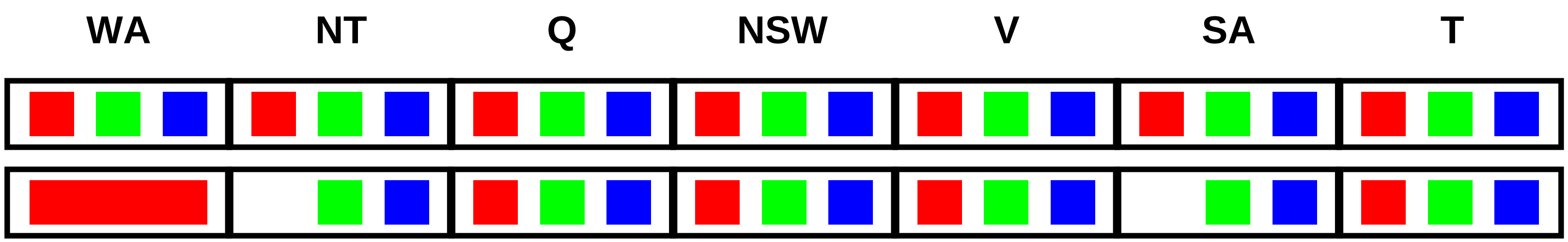
Ukončit prohledávání, když už žádná proměnná nemá žádnou legální hodnotu.



Dopředná kontrola (Forward checking)

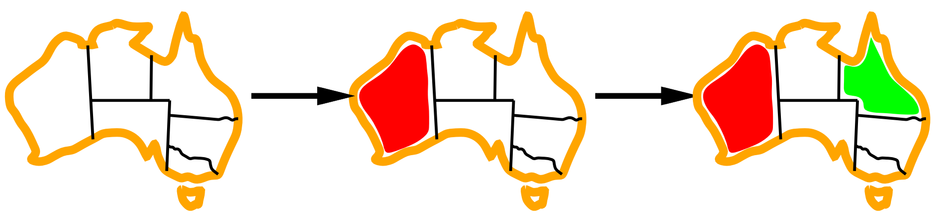
Hlavní myšlenka: Pamatovat si přípustné zbývající hodnoty pro nepřiřazené proměnné
Ukončit prohledávání, když už žádná proměnná nemá žádnou legální hodnotu.





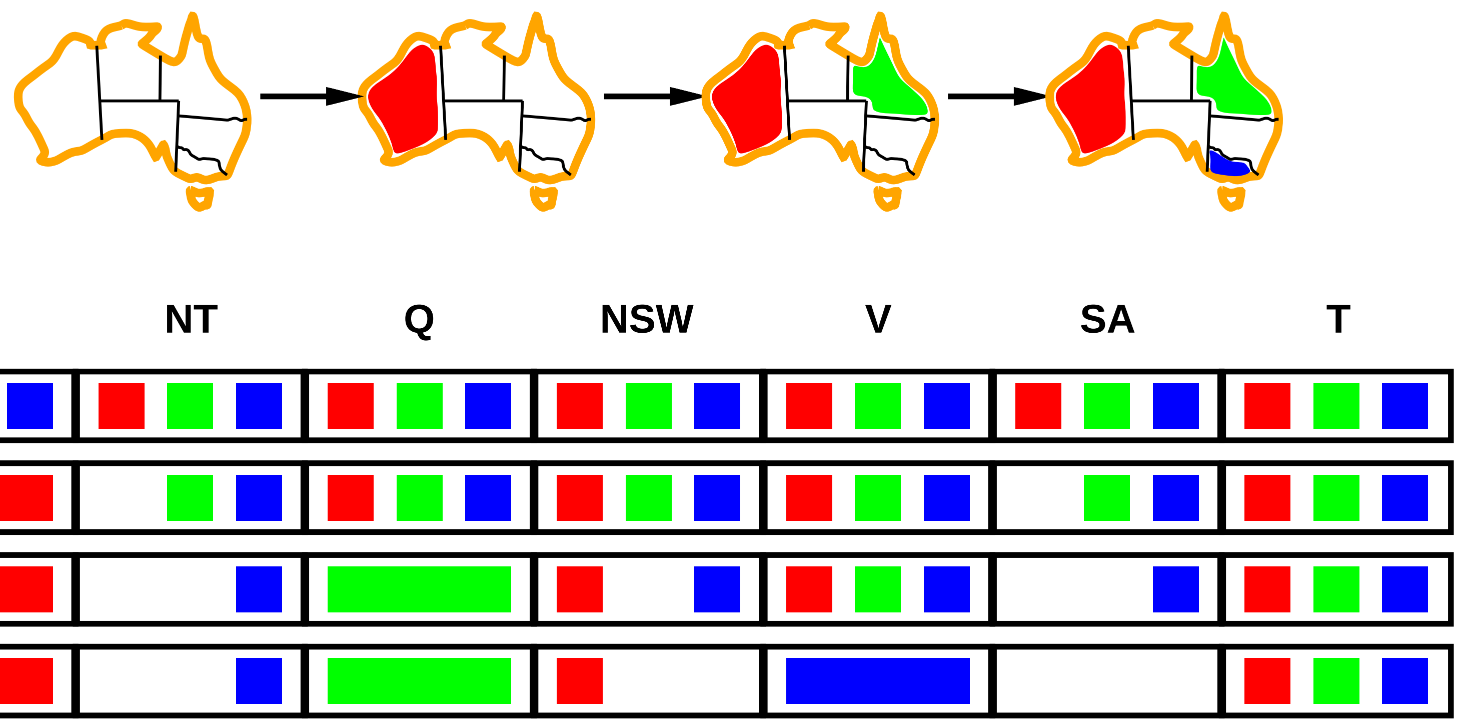
Dopředná kontrola (Forward checking)

Hlavní myšlenka: Pamatovat si přípustné zbývající hodnoty pro nepřiřazené proměnné
Ukončit prohledávání, když už žádná proměnná nemá žádnou legální hodnotu.



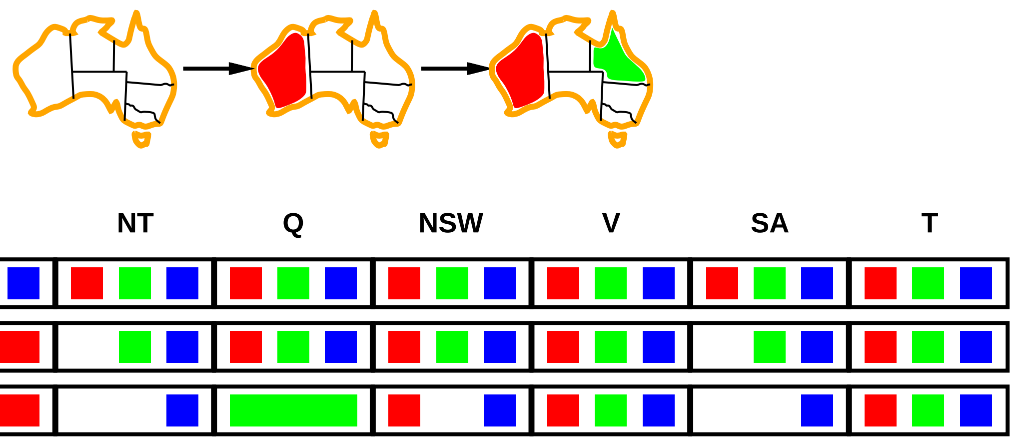
Dopředná kontrola (Forward checking)

Hlavní myšlenka: Pamatovat si přípustné zbývající hodnoty pro nepřiřazené proměnné
Ukončit prohledávání, když už žádná proměnná nemá žádnou legální hodnotu.



Šíření omezení (Constrain propagation)

Dopředná kontrola šíří informace od přiřazených k nepřiřazeným proměnným, ale nedetekuje všechna budoucí selhání:



NT and SA nemohou být zároveň modré!

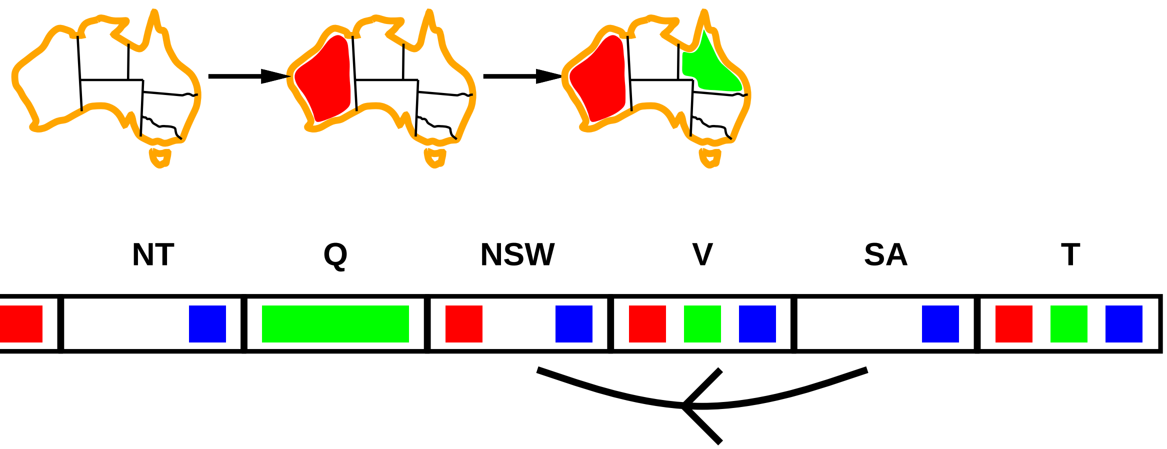
Šíření omezení opakovaně vynucuje omezení lokálně

Konzistence hran

Nejjednoduší forma šíření umožňuje konzisetnci hran

$X \longrightarrow Y$ je konzistentní právě když

pro *každou* hodnotu x z X existuješ *nějaké* přípustné y

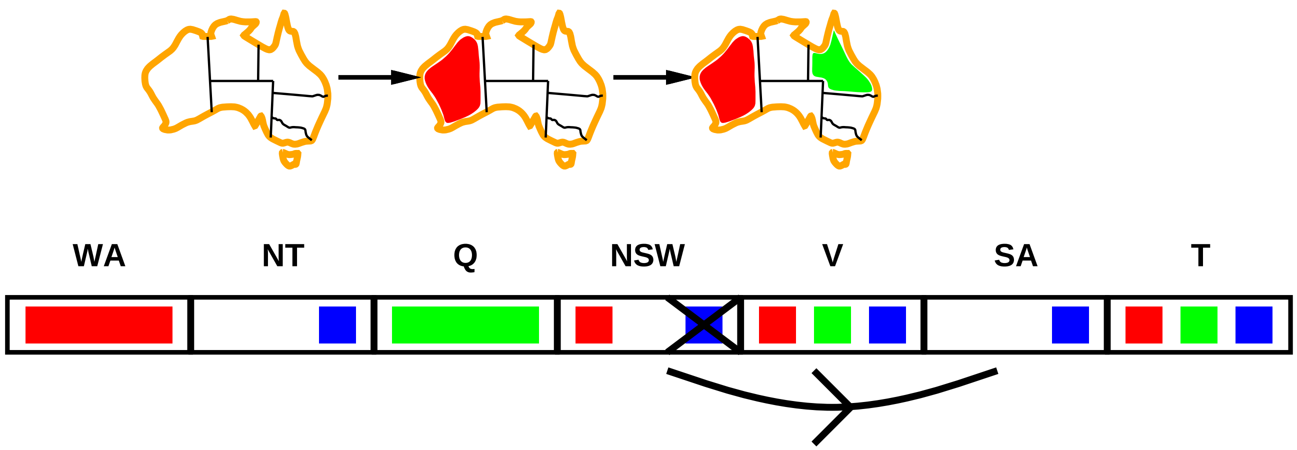


Konzistence hran

Nejjednoduší forma šíření umožňuje konzisetnci hran

$X \longrightarrow Y$ je konzistentní právě když

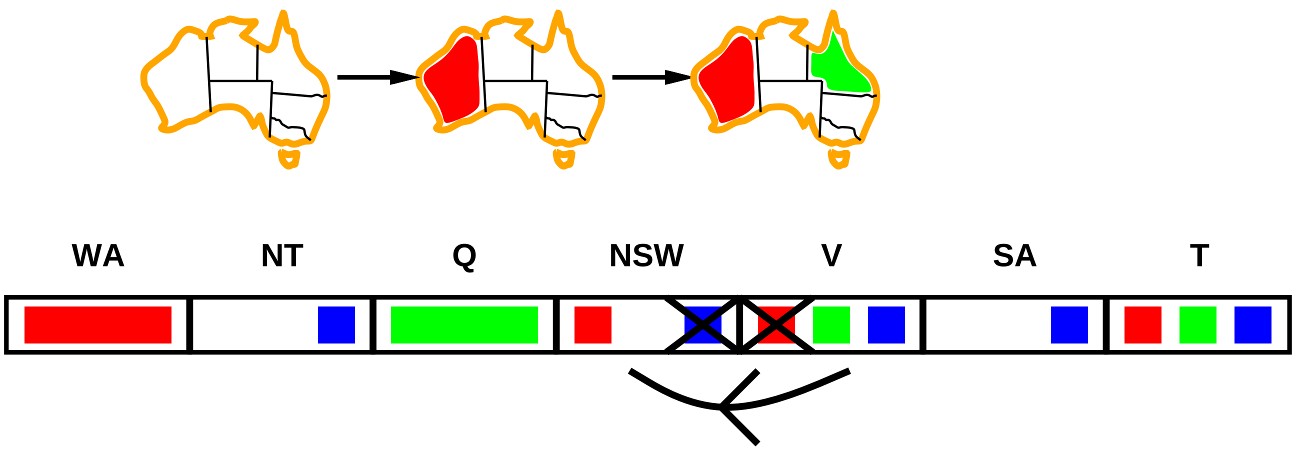
pro *každou* hodnotu x z X existuje *nějaké* přípustné y



Konzistence hran

Nejjednoduší forma šíření umožňuje konzisetnci hran

$X \longrightarrow Y$ je konzistentní právě když
pro *každou* hodnotu x z X existuje *nějaké* přípustné y

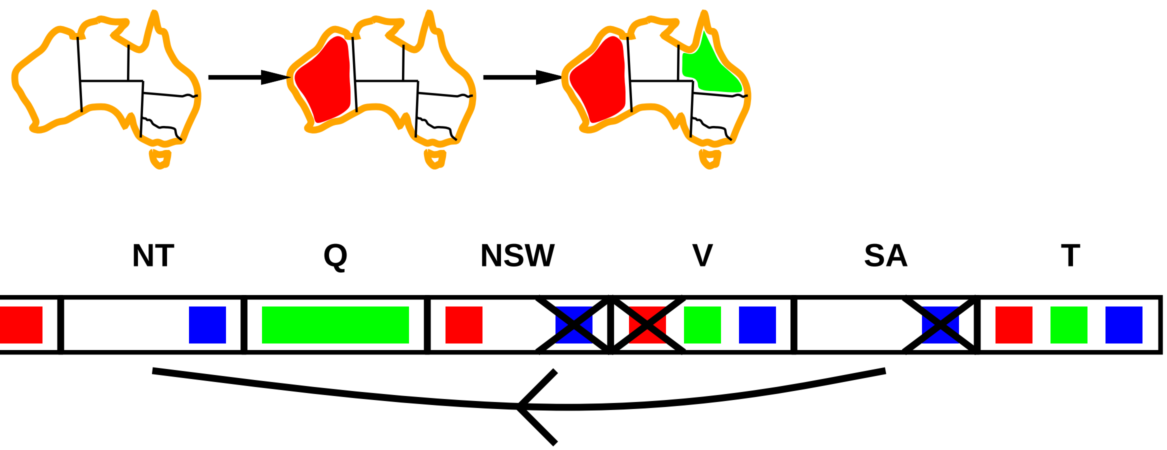


V případě, že X ztratí hodnotu, souseda X je třeba znovu zkontrolovat

Konzistence hran

Nejjednoduší forma šíření umožňuje konzisetnci hran

$X \rightarrow Y$ je konzistentní právě když
pro *každou* hodnotu x z X existuješ *nějaké* přípusné y



V případě, že X ztratí hodnotu, souseda X je třeba znovu zkontrolovat

Konzistence hran detekuje selhání dříve než dopředná kontrola

Může běžet jako preprocessor or nebo po každém přiřazení

Algoritmus konzistence hran

```
function AC-3( csp) returns the CSP, possibly with reduced domains
   inputs: csp, a binary CSP with variables {X_1, X_2, ..., X_n}
   local variables: queue, a queue of arcs, initially all the arcs in csp

   while queue is not empty do
      (X_i, X_j) ← REMOVE-FIRST(queue)
      if REMOVE-INCONSISTENT-VALUES(X_i, X_j) then
         for each X_k in NEIGHBORS[X_i] do
            add (X_k, X_i) to queue
```

```
function REMOVE-INCONSISTENT-VALUES( X_i, X_j) returns true iff succeeds
   removed ← false
   for each x in DOMAIN[X_i] do
      if no value y in DOMAIN[X_j] allows (x,y) to satisfy the constraint X_i ↔ X_j
         then delete x from DOMAIN[X_i]; removed ← true
   return removed
```

$O(n^2 d^3)$, lze redukovat do $O(n^2 d^2)$ (ale detekce *všech* je NP-hard)

Použití algoritmů lokálního prohledávání pro CSP

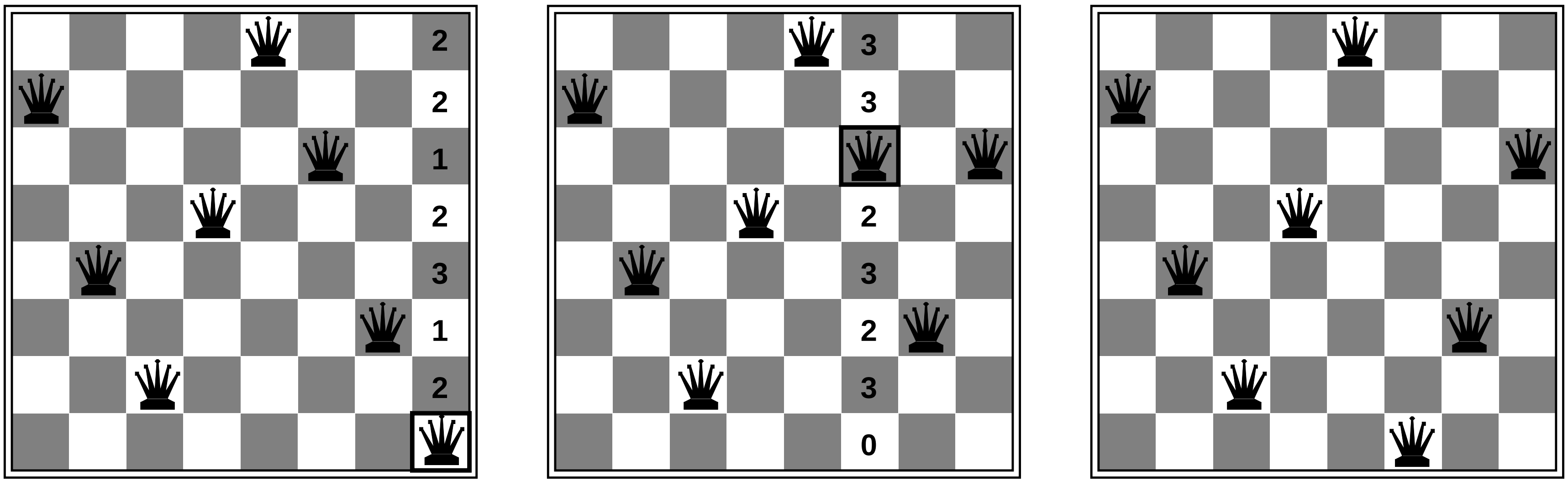
- Gradientní metody pracují zpravidla s **množinou úplných konfigurací**, t.j., všechny proměnné jsou přiřazeny
- Aplikace na problém CSPs:
  - umožnit práci se stavy s nesplněnými omezeními
  - zavést operátory *znovupřiřazení* (změny) hodnot proměných
- **Výběr proměnných:** náhodně vybrat konfliktní proměnou
- **Výběr hodnoty:** například pomocí **min-conflicts** heuristiky:
  - vyber takovou hodnotu, která bude porušovat minimální počet omezení
    t.j., gradientní prohledávání s $h(n)$ = počet nesplněných omezení

Algoritmus `min-conflict`

function MIN-CONFLICTS(csp, max_steps) **returns** a solution or failure
  inputs: csp, a constraint satisfaction problem
    max_steps, the number of steps allowed before giving up

  $current \leftarrow$ an initial complete assignment for csp
  for i = 1 to max_steps **do**
    if $current$ is a solution for csp **then return** $current$
    $var \leftarrow$ a randomly chosen, conflicted variable from VARIABLES[csp]
    $value \leftarrow$ the value v for var that minimizes CONFLICTS(var, v, $current$, csp)
    set $var = value$ in $current$
  return $failure$

Příklad: 8-královen



Porovnání

- mapa USA: barvení mapy USA pomocí 4 barev
- n-královen: řešení 2 až 50-královen
- zebra: logická hádanka (viz následující slide)
- random1, random 2: umělé problémy

problém	BCK	BCK+MRV	FCH	FCH+MRV	MIN-CON
mapa USA	($>$ 1.000K)	($>$ 1.000K)	2K	60	64
n-královen	($>$ 40.000K)	13.500K	($>$ 40.000K)	817K	4K
zebra	3.859K	1K	35K	0.5K	2K
random1	4.15K	3K	26K	2K	
random2	942K	27K	77K	15K	

měříme medián počtu kontroly konzistence (přes 5 testů), výraz v závorce znamená, že po tolika operacích nebylo nalezeno řešení.

ZEBRA: Consider the following logic puzzle: In five houses, each with a different color, live 5 persons of different nationalities, each of whom prefer a different brand of cigarette, a different drink, and a different pet. Given the following facts, the question to answer is "Where does the zebra live, and in which house do they drink water?"

The Englishman lives in the red house.

The Spaniard owns the dog.

The Norwegian lives in the first house on the left.

Kools are smoked in the yellow house.

The man who smokes Chesterfields lives in the house next to the man with the fox.

The Norwegian lives next to the blue house.

The Winston smoker owns snails.

The Lucky Strike smoker drinks orange juice.

The Ukrainian drinks tea.

The Japanese smokes Parliaments.

Kools are smoked in the house next to the house where the horse is kept.

Coffee is drunk in the green house.

The Green house is immediately to the right (your right) of the ivory house.

Milk is drunk in the middle house.