OPT ukázkový test 1 řešení

May 8, 2020

2. (a) Není afinní, viz následující protipříklad.
   $\frac{1}{2}f(2,0)+\frac{1}{2}f(0,2)=(2,-1,-1)\neq(2,-1,0)=f(1,1)$
   (b) Když není afinní, nemůže být ani lineární
   (c) je jednoznačně definované
   (d) v OPT je izometrie definovaná pouze pro lineární zobrazení.

3. Bod $(1,1,1)$ lze zapsat jako
$$1\cdot(1,1,0)+(-1)\cdot(0,0,-1),$$
je tedy v lineárním obalu množiny vektorů a proto je jeho vzdálenost od spanu 0.

4. (a) hledaný vektor $\mathbf{x}$ je ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b}$ na lineární prostor generovaný sloupečky matice $\mathbf{A}$, který je unikátní, nazvěme tuto projekci ho třeba $\mathbf{b_0}$. Potom hledáme řešení soustavy rovnic
$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b_0},$$
o které víme že má nějaké řešení. Zadání říká, že jich je nekonečeně mnoho, mezi nimi třeba různá $\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}$, pak $\mathbf{Ax_1}=\mathbf{Ax_2}=\mathbf{b_0}$ a $\mathbf{A}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})=\mathbf{0}$. Vektor $\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2}$ je netriviální člen null$\mathbf{A}$.
   (b) Jako jednoduchý protipříklad uvedeme $\mathbf{A}=\mathbf{0}$, $\mathbf{b}=\mathbf{1}$. Pak každé x je optimální řešení, ale pro žádné neplatí $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.
   (c) Podobný protipříklad jako minule, jen $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.
   (d) stejný protipříklad jako výše.

5. Viz skripta, sekce 5.1.1, rovnice 5.7.
Protože se jedná o ortogonální projekci, tak projekce bodu $\mathbf{a}$ na daný podprostor bude
$$\mathbf{Pa}=\mathbf{a}+k\mathbf{x}$$
pro nějaký skalár k a bude platit $(\mathbf{a}+k\mathbf{x})^T\mathbf{x}=0$, tedy že tato projekce je kolmá na $\mathbf{x}$.
$$(\mathbf{a}+k\mathbf{x})^T\mathbf{x}=0$$
$$\mathbf{a}^T\mathbf{x}+k\mathbf{x}^T\mathbf{x}=0$$
$$k=-\frac{\mathbf{a}^T\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||^2}.$$
Dosazením do vztahu s projektorem a přepsání maticevého násobení vektorů dostaneme
$$\mathbf{Pa}=\mathbf{a}-\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}{||\mathbf{x}||^2}\mathbf{a}$$
$$\mathbf{Pa}=\left(\mathbf{I}-\frac{\mathbf{x}\mathbf{x}^T}{||\mathbf{x}||^2}\right)\mathbf{a}$$

6. Bod $(3,0,0) = 3 \cdot (1,0,0)$ je v obou množinách, proto automaticky neplatí b, c, d, e.

7. Kdyby $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, pak $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nemůže být regulární, proto c,d,e je špatně. Pokud $\mathbf{A}$ bude mít LN řádky, bude široká s rozměry $m < n$ a bude mít hodnost m, pak $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ bude mít rozměry n, n a aby byla regulární, musí mít hodnost n, jenže násobením se nezvýší hodnost, takže musí platit a.

   Zároveň se dá snadno ukázat, že skutečně platí; čtvercová matice je regulární právě tehdy, když má všechna vlastní čísla nenulová, proto se podíváme na kvadratickou formu $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = ||\mathbf{A}\mathbf{x}||^2$, která je pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vždy kladná (LN sloupce), prot je tato kvadratická forma positivně definitní a $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

8. (a) Řešením je $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$, po dosazení QR rozkladu dostaneme

   $$\mathbf{x} = (\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

   S využitím LN sloupců $\mathbf{A}$ a vlastnisti ortogonální matice

   $$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

   dostaneme

   $$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$$

   (b) tato úloha nemusí mít řešení, proto je výrok nepravdivý.

   (c) Neplatí kvůli hodnostem, podobně disutováno dříve.

   (d) matice $\mathbf{A}$ má triviální nulový prostor (LN sloupce).

   (e) vzhledem k předchozímu bodu by $\mathbf{Q}$ musela být nulová matice.

9. (a) S využitím ortonormálníchh sloupečků $\mathbf{V}$ máme

   $$||\mathbf{V}\mathbf{x}||^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2,$$

   takže se jedná o izometrii bez dalších podmínek.

   (b) a)

   (c) a)

   (d) Vezmeme třeba $\mathbf{V} = [1,0]^T$, pak je ve zmíněném nulovém prostoru třeba vektor $[0,1]^T$

   (e) Kvůli různým rozměrům nejde mluvit o tom, jestli jsou dva vektory na sebe kolmé.