Řešení úkolů v příkladech 1 a 2 napište do připravených míst. Postupy psát nemusíte.

(Za každý příklad dostanete max. 2.5 bodu.)

1. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(x,y) = x^2y$.

a) Napište její totální derivaci (Jacobiho matici) v obecném bodě (x,y).

$f'(x,y) =$

b) Napište její Hessovu matici v obecném bodě (x,y).

$f''(x,y) =$

c) Napište její Taylorův polynom prvního stupně v bodě $(1,1)$. Polynom co možná zjednodušte (určitě ho nenechte v maticovém tvaru).

$T_1(x,y) =$

2. Hledáme přibližné řešení soustavy

$$x = -1, \quad y = 0, \quad (1-x)y = 1$$

s neznámými $x, y \in \mathbb{R}$ ve smyslu nejmenších čtverců.

a) Formulujte jako optimalizační úlohu.

b) Pro tuto úlohu napište iteraci (tj. vzorec či vzorce, jak se spočítá (x_{k+1}, y_{k+1}) z (x_k, y_k)) gradientní metody. Vzorec či vzorce co možná zjednodušte.

$(x_{k+1}, y_{k+1}) =$

c) Pro tuto úlohu napište iteraci čisté Gauss-Newtonovy metody. Vzorec či vzorce co možná zjednodušte.

$(x_{k+1}, y_{k+1}) =$

V každém z příkladů 3 až 7 je právě jedna z nabízených odpovědí správně. Své odpovědi vyznačte do tabulky tak, že příslušná políčka proškrtnete křížkem. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, příslušný sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou. ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY!

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus půl bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

	3	4	5	6	7
a					
b					
c					
d					
e					

3. Vnitřek množiny $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x \geq 0 \} \cup \{(0,0)\}$ je množina

(a) prázdná
(b) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0 \} \cup \{(0,0)\}$
(c) $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1,\ x > 0 \}$
(d) $\{(0,0)\}$
(e) žádná z uvedených možností

4. Nechť $n = 100$. Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ daná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$ má na množině $\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_i \leq 1\ \forall i = 1, \ldots, n \}$

(a) právě jedno lokální minimum a více než jedno globální maximum
(b) právě jedno lokální minimum, více než jedno lokální maximum a právě jedno globální maximum
(c) více než jedno lokální minimum
(d) sedlový bod
(e) žádná z uvedených možností

5. Předpokládejme, že ve stacionárním bodě funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje její Hessova matice, která má všechna vlastní čísla nezáporná a aspoň jedno vlastní číslo nulové. Pak

(a) v tomto bodě funkce může nebo nemusí mít lokální minimum
(b) v tomto bodě má funkce lokální minimum
(c) v tomto bodě nemá funkce lokální minimum
(d) tímto bodem prochází přímka, na které je funkce konstantní
(e) všechny směrové derivace funkce v tomto bodě jsou kladné

6. Nechť $K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = 1 \}$. Množina $\operatorname*{argmin}_{(x,y)\in K}(x^2 + y^2)$ je

(a) $\{(0,-1/2),(0,1/2)\}$
(b) $\{(1,0),(-1,0)\}$
(c) $\{(\pm 1/4, \pm 1/4)\}$
(d) $\{(0,0)\}$
(e) žádná z uvedených možností

7. Máme funkce $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané vzorci $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - 1$ (kde $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) a $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 - 1$. Je-li $\mathbf{x}^*$ lokální maximum funkce f za podmínky $g(\mathbf{x}) = 0$, pak

(a) $\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{c}$ pro nějaké $\alpha > 0$
(b) $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
(c) vektory $\nabla g(\mathbf{x}^*)$ a $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ jsou ortogonální
(d) $\nabla g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
(e) žádná z uvedených možností