Následující příklad (číslo 1) vyřešte a postupy a výsledky napište do připravených mezer.

(Za tento příklad dostanete max. 3 body.)

1. Máme funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danou vzorcem $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 - x_1^2 + x_1 x_2$.

   a) Najděte symetrickou matici $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{b}$ a skalár c tak, aby pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ platilo $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$. Pokud to nejde, odůvodněte.

   b) Najděte symetrickou matici $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{b}$ a skalár c tak, aby pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ platilo $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}-\mathbf{b})^T\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{b}) + c$. Pokud to nejde, odůvodněte.

   c) Má funkce f extrém? Pokud ano, tak jakého je typu (minimum/maximum) a v jakých bodech se nabývá? Odpovědi odůvodněte.

V každém z příkladů na další straně (číslo 2 až 8) je právě jedna z nabízených odpovědí správně. Své odpovědi vyznačte do tabulky tak, že příslušná políčka proškrtnete křížkem. Nechcete-li na nějaký příklad odpovědět, příslušný sloupec v tabulce ponechte prázdný. Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.

ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY!

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus půl bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

	2	3	4	5	6	7	8
a							
b							
c							
d							
e							

2. Dáno je $n \geq 2$ bodů $(a_{i1}, a_{i2}) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$, které tvoří řádky matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$. Vektor $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ minimalizující číslo $\sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + x_2 + a_{i2})^2$ je

(a) vlastní vektor odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$
(b) vlastní vektor odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
(c) vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
(d) pravý singulární vektor odpovídající nejmenšímu singulárnímu číslu matice $\mathbf{A}$
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení

3. Nechť $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno předpisem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$. Pak pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ je $f(\mathbf{x})$

(a) vždy kladné
(b) vždy záporné
(c) vždy nezáporné a ne vždy kladné
(d) vždy nekladné a ne vždy záporné
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení

4. Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je symetrická. Pak

(a) má reálná vlastní čísla
(b) má nezáporná vlastní čísla
(c) má nenulová vlastní čísla
(d) má komplexní (ne nutně reálná) vlastní čísla, ale vždy po dvou komplexně sdružená
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení

5. Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je daná vzorcem $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$, kde $\mathbf{A}$ je symetrická pozitivně definitní a $\mathbf{b} \neq 0$, $c < 0$. Pak f

(a) má minimum v bodě $\mathbf{x} \neq 0$
(b) má maximum v bodě $\mathbf{x} \neq 0$
(c) má minimum v bodě $\mathbf{x} = 0$
(d) má maximum v bodě $\mathbf{x} = 0$
(e) nemá extrém

6. Optimální hodnota úlohy $\max\{\, \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1 \,\}$ při dané symetrické matici $\mathbf{A}$ je rovna

(a) největšímu vlastnímu čísla matice $\mathbf{A}$
(b) nejmenšímu vlastnímu číslu matice $\mathbf{A}$
(c) největšímu vlastnímu čísla Grammovy matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
(d) stopě matice $\mathbf{A}$
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení

7. Nechť $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matice $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$

(a) má všechna vlastní čísla reálná nezáporná
(b) je pozitivně definitní
(c) je ortogonální projektor
(d) má aspoň jedno nenulové vlastní číslo
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení

8. Nechť $M = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \,\}$. Funkce $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ s definičním oborem $\mathbb{R}^2$

(a) nabývá na množině M minima v bodě $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$
(b) je indefinitní kvadratická forma
(c) nabývá na množině M maxima, jehož hodnota je 1
(d) nemá na svém definičním oboru globální minimum
(e) neplatí žádné z uvedených tvrzení