**Následující příklad (číslo 1) vyřešte a postup a výsledek napište do připravené mezery.**

(Za tento příklad dostanete max. 2 body.)

1. Chceme vyrobit papírovou krabici tvaru kvádru o výšce $h$ se čtvercovou podstavou o straně $a$, přičemž boční stěny mají dvojnásobnou tloušťku oproti spodní a vrchní stěně. Jaké budou rozměry takové krabice, pokud má mít jednotkový objem a co možná nejmenší hmotnost?

**V každém z následujících příkladů (číslo 2 až 9) je právě jedna z nabízených odpovědí správně. Své odpovědi vyznačte do tabulky tak, že příslušná políčka proškrtnete křížkem. Nejste-li si odpovědí na nějaký příklad jisti, nemusíte na něj odpovídat (tj. příslušný sloupec v tabulce ponechte prázdný). Pokud již vyznačený křížek chcete odstranit, políčko s křížkem zcela zaplňte modrou barvou.**

**ODPOVĚDI NEVYZNAČENÉ V TABULCE NEBUDOU ZAPOČÍTÁNY!**

(Za správnou odpověď je 1 bod, za chybnou odpověď mínus půl bodu, za chybějící odpověď 0 bodů.)

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | | | | |
| b | | | | | | | | |
| c | | | | | | | | |
| d | | | | | | | | |
| e | | | | | | | | |

2. Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $\mathbf{f}(x,y) = (x+y, -y, xy-1)$

   (a) není afinní
   (b) je lineární
   (c) není jednoznačně definované
   (d) je isometrie
   (e) žádná z uvedených možností

3. Vzdálenost bodu $(1,1,1)$ od podprostoru $\operatorname{span}\{(1,1,0),(0,0,-1)\}$ je rovna

   (a) 0
   (b) 1
   (c) $\sqrt{3}$
   (d) $2\sqrt{3}$
   (e) žádná z uvedených možností

4. Pro každé $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ takové, že optimalizační úloha $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ má nekonečný počet optimálních řešení, platí:

(a) $\dim \operatorname{null} \mathbf{A} > 0$
(b) existuje vektor $\mathbf{x}_0$ splňující $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$,
(c) soustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení,
(d) $m < n$,
(e) žádná z uvedených možností

5. Nechť množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je přímka procházející počátkem a daným bodem $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Ortogonální projektor na podprostor $X^\perp$ je roven

(a) $\mathbf{I} - (\mathbf{x}\mathbf{x}^T)/\|\mathbf{x}\|^2$
(b) $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$
(c) $\mathbf{x}(\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}$
(d) $\mathbf{U}\mathbf{U}^T$ kde $\mathbf{U} = \mathbf{I} - \mathbf{x}$
(e) žádná z uvedených možností

6. Pro podprostory $X = \operatorname{span}\{(0,1,0),(1,0,0)\}$ a $Y = \operatorname{span}\{(0,0,-2),(3,0,0)\}$ platí

(a) $X \cap Y \neq \{\mathbf{0}\}$
(b) $X \cap Y = \{\mathbf{0}\}$
(c) $X \perp Y$
(d) $Y = X^\perp$
(e) žádná z uvedených možností

7. Matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ je regulární

(a) za předpokladu lineární nezávislosti sloupců matice $\mathbf{A}$
(b) za předpokladu lineární nezávislosti řádků matice $\mathbf{A}$
(c) za předpokladu, že $\mathbf{A}$ je úzká matice
(d) za předpokladu, že $\mathbf{A}$ je široká matice
(e) vždy

8. Nechť $m > n$, matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má lineárně nezávislé sloupce a $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$ je její redukovaný QR rozklad. Pak

(a) vektor $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ je řešením úlohy $\min_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}\|^2$ pro jakýkoli vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
(b) vektor $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ je řešením úlohy $\min\{\, \|\mathbf{u}\| \mid \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b},\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \,\}$ pro jakýkoli vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
(c) $\mathbf{A}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T$ je jednotková matice
(d) $\operatorname{null} \mathbf{A}$ má dimenzi $m - n$
(e) sloupce matice $\mathbf{Q}$ tvoří ortonormální bázi prostoru řešení soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

9. Nechť $\mathbf{U}$ je ortogonální matice. Nechť $\mathbf{V}$ je matice tvořená jen některými sloupci matice $\mathbf{U}$. Pak

(a) zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}\mathbf{x}$ je vždy isometrie
(b) zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}\mathbf{x}$ je isometrie jen za předpokladu, že $\det \mathbf{U} = 1$
(c) zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}\mathbf{x}$ je isometrie jen za předpokladu, že je surjektivní
(d) $\operatorname{null}(\mathbf{V}^T)$ je vždy triviální lineární podprostor
(e) všechny vektory z $\operatorname{null} \mathbf{V}$ jsou kolmé na všechny ostatní sloupce matice $\mathbf{U}$, které nejsou obsaženy ve $\mathbf{V}$