příklady OPT 5. cvičení

Václav Voráček

March 24, 2020

6.1

(a) Můžeme výraz třeba roznásobit a uvidíme, že je to polynom ve dvou proměnných, x a y, monom nejvyššího stupně je třeba x^3, proto je stupeň polynomu 3. Polynom obsahuje i monomy jiného stupně než 3, například člen x, proto není homogenní.

(b) Zde můžeme funkci přepsat jako $f(\boldsymbol{x}) = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$, kde x_i jsou neznámé a a_i známé. Je to tedy součet n monomů stupně 1, proto je to homogenní polynom.

(c) Zde přepíšeme na $f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, což pro $n \neq 1$ zřejmě není polynom. Pro $n = 1$ by nás mohlo napadnou, že $\sqrt{x^2} = x$, jenže to není pravda a $\sqrt{x^2} = |x|$, proto f není polynom.

(d) Nejprve si všimneme, že $\boldsymbol{Ax + b}$ je vektor, jehož každá složka je polynom. Jeho i-tá složka je totiž $\boldsymbol{a_i^T x} + b_i$, kde $\boldsymbol{a_i}$ je i-tý řádek matice A. To je polynom, protože je to součet konstanty (polynomu) a polynomu (podle (b)). Druhá mocnina normy vektoru je součet druhých mocnin složek vektoru. Druhá mocnina polynomu je polynom, součet polynomů je polynom, takže f je polynom v $\boldsymbol{x}$, což je n proměnných. V obecném případě není homogenní (protipříklad: $|x + 1|^2 = x^2 + 2x + 1$). Jeho stupeň je 2. Jedná se totiž o součet druhých mocnin polynomů prvního stupně.

(e) Podobně jako v (b). Přepíšeme $f(\boldsymbol{x}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, což je součet monomů druhého stupně, jedná se tedy o homogenní polynom stupně 2. Proměnných je $2n$.

(f) Po přepisu maticového násobení $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a^T X b} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i X_{ij} b_j$ vidíme, že se jedná o součet monomů prvního stupně, f je tedy homogenní polynom prvního stupně a počet proměnných je jako prvků matice $\boldsymbol{X}$, tedy n^2.

(g) Z definice determinantu je f součet monomů, n-tého stupně. Jedná se tedy o homogenní polynom tohoto stupně. Proměnných je n^2.

6.2

Zde si nejprve připomeneme co to je vlastní vektor nějaké matice. Jedná se o netriviální vektor, který nemění směr po vynásobení maticí. Pouze se vynásobí nějakým skalárem. Tento skalár se nazývá vlastní číslo. Tuto vlastnost můžeme zaznamenat takto, $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$.

V našem případě je to soustava rovnic:

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = \lambda v_1 \\ -v_1 - 3v_2 = \lambda v_2 \end{cases}$$

Kterou už můžeme řešit. Například si můžeme říci, že buď $\boldsymbol{v} = (0, t)$ (což vidíme že nefunguje), nebo bude existovat řešení $\boldsymbol{v} = (1, x)$ pro nějaká x a řešit tu soustavu. Toto může být rychlé pro nějaké speciální matice, třeba 2×2, ale obecně tento postup neškáluje. Proto je lepší výše zmíněný vztah ještě přepsat:

$$\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$$

$$\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{Ev}$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})v = \boldsymbol{0}$$

Z čehož vidíme, že $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E})$ má netriviální nulový prostor, je tedy singulární a proto má nulový determinant. Charakteristický polynom této matice je

$$(1 - \lambda)(-3 - \lambda) + 2$$

a snadno najedeme jeho kořeny, kdy je ta matice singulární

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Když známe vlastní čísla, je triviální dopočítat vlastní vektory.

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{2} \implies \boldsymbol{v} = \left(-1, \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\right)$$

V matlabu je na hledání vlastních čísel a vektorů funkce `eig` [1]

6.4

1. Charakteristický polynom nulové matice je $(-\lambda)^n$ a proto n-násobné vlastní číslo je 0.
2. Pro jednotkovou matici je chrakteristický polynom $(1-\lambda)^n$, tedy vlastní číslo (opět n-násobné) je 1.
3. Pro diagonální i trojúhelníkovou matici je determinant součin prvků na diagonále, označme je a_i, pak je charakteristický polynom $\prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda)$, takže vlastní čísla jsou prvky na diagonále.

6.7

Zde nejprve uhodneme vlastní čísla následující matice (nebo spočítáme jako v minulém cvičení), protože u malých symetrických matic se hádají dobře.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Je vidět, že pokud k diagonále přičteme 1, jsou oba řádky matice stejné, matice je proto singulární. Podobně když odečteme 3, bude součet řádků 0 a matice je opět singulární. Jedno vlastní číslo je 3, druhé -1 a je to tedy indefinitní matice.

Při řešení pomocí hlavních minorů (pro obě matice) vidíme, že jsou matice regulární, proto pokud je nějak semidefinitní, tak je i definitní, proto nám stačí vůdčí hlavní minory (VHM). Připomeňme, že VHM je determinant matice, která je tvořena prvními několika sloupci a řádky matice. Díváme se tedy na determinanty čtvercových podmatic vlevo nahoře.

Pro výše uvedenou matici $\boldsymbol{A}$ je jeden VHM 1 a druhý -3, proto není positivně definitní, není ani negativně definitní, protože $-\boldsymbol{A}$ má VHM -1 a -3, takže ani tato matice není positivně definitní, $\boldsymbol{A}$ je tedy indefinitní.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tato matice je opět regulární a druhý VHM je 0, proto matice není ani positivně definitní, ani negativně definitní, takže je opět indefinitní.

6.8

Stačí se dívat na diagonální prvky, jeden je kladný a druhý záporný, proto pro vektor $\boldsymbol{x} = (t, 0)$ je $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = t^2$, podobně pro $\boldsymbol{x} = (0, t)$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = -4t^2$. Z těchto důvodů neplatí první a druhé tvrzení a snadno domyslíme, že neplatí ani tvrzení třetí, protože v bodě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ je funkční hodnota 0, ale libovolně blízko tohoto bodu umíme najít jak kladnou, tak zápornou hodnotu funkce a proto tu nemůže být extrém.

Kdybychom chtěli použít vlastní čísla pro řešení této úlohy, museli bychom matici prvně symetrizovat a poté až počítat vlastní čísla a určovat definitnost matice.

6.9

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Všimneme si, že matice $\boldsymbol{A}$ je positivně definitní, její vrstevnice jsou tedy elipsy a pro následující úvahu se budeme tvářit, že se jedná o elipsu (k tomu nás nabádají i další body). Tato elipsa nemá rovnoběžné osy se osami x, y a my hledáme ortogonální matici $\boldsymbol{U}$, která transformuje souřadnice tak, že elipsa bude mít osy rovnoběžné s osami u, v. Ortogonální matice je rotační matice složená s případným zrcadlením, takže chceme tuto elipsu rotovat tak, aby se její osy shodovaly

[1] https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/eig.html

s osami souřadného systému. Tato úvaha nám napoví, že budou existovat právě 4 takové rotační matice. Každou z nich můžeme spojit se zrcadlením (prohozením pořadí os). takže bude existovay 8 matic $\boldsymbol{U}$ vyhovující zadání.

Nazvěme $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonální matici mající na diagonále hledaná čísla a, b a nechť $\boldsymbol{u} = (u, v)$, pak hledáme ortogonální matici $\boldsymbol{U}$ aby platilo $\boldsymbol{x^T A x} = \boldsymbol{u^T \Lambda u} = \boldsymbol{x^T U^T \Lambda U x}$, což nám (ne náhodou) připomene spektrální rozklad matice $\boldsymbol{A}$. Uvědomme si teď význam spektrálního rozkladu matice kvadratické formy. matice tvořena vlastními vektory je rotační matice[2], která nám nějak zrotuje prostor, aby výsledná kvadratická forma měla osy rovnoběžné se souřadnými osami a proto je možné ji popsat pouze diagonální maticí určující "chování" této funkce v jednotlivých směrech.

Vraťme se ještě k nejednoznačnosti $\boldsymbol{U}$. Je to dáno tím, že pořadí vlastních vektorů při spektrálním rozkladu není (v matematice) definované, to jsou 2 možnosti pro volbu U. Poté můžeme a nemusíme každdý vlastní vektory tvořící $\boldsymbol{U}$ vynásobit -1, což dělá dohromady 8 možností.

Možný výsledek je třeba $a = 2$ $b = 4$, $\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Jedná se o elipsu, která má rovnoběžné osy se souřadnými osami.

(d) Jedná se o elipsu, jejíž delší poloosa je část přímky $y = -x$.

6.13, 6.25

ve skriptech

[2] Můžou se ještě "permutovat osy", ale to není pro geometrický vhled podstatné