Optimalizace

Maticové hry

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Teorie her

Teorie her je matematická teorie interaktivního rozhodování v situacích (hrách) za přítomnosti více subjektů (hráčů), z nichž každý sleduje své vlastní cíle a výsledek závisí na rozhodnutí (strategii) všech.

Jako samostatná disciplína byla teorie her ustavena v práci

J. von Neumann, O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944.

Strategické hry

Základní komponenty strategické hry

1. Hráči
2. Strategie každého hráče
3. Užitková funkce

Příklady a aplikace

- šachy, poker a jiné deskové hry
- aukce a ekonomické modely
- modely síťové bezpečnosti

Hra dvou hráčů s nulovým součtem

Maticová hra

1. Hráči 1 a 2 (řádkový a sloupcový)
2. Konečné množiny strategií I a J
3. Výplatní matice $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Oba hráči současně volí strategie $i \in I$ a $j \in J$
- Hodnota a_{ij} je výplatou hráče 1, kterou dostane od hráče 2,

$$a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$$

- Racionálně jednající hráči volí strategie maximalizující výplatu

Příklad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Způsoby řešení

- Hráč se rozhodne pro strategii, která je nejlepší z nejhorších možných variant
- Hráč zvolí strategii maximalizující jeho výplatu za předpokladu, že protihráč postupuje stejně

V obou případech jde o třetí řádek a druhý sloupce.

Garanční řešení

Definice

Dvojice strategií $(i^*, j^*) \in I \times J$ je garančním řešením, platí-li

$$\min_{j \in J} a_{i^* j} = \max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij}$$

$$\max_{i \in I} a_{ij^*} = \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij}$$

- Garanční řešení (i^*, j^*) vždy existuje
- Ovšem platí jen

$$\max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} \quad \leq \quad a_{i^* j^*} \quad \leq \quad \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij}$$

Rovnovážné řešení

Definice

Dvojice strategií $(i^*, j^*) \in I \times J$ je rovnovážným řešením, pokud

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j}$$

pro všechna $i \in I$ a $j \in J$.

- Jde o koncept známý jako Nashova rovnováha
- Při volbě rovnovážných strategií nemá žádný z hráčů motivaci zvolit jinou strategii

Příklady

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Problémy

- $\max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} < \min_{j \in J} \max_{i \in I} a_{ij}$
- Rovnovážné řešení neexistuje
- První dvě hry lze řešit **znáhodněním** volby strategií
- U třetí hry není ani jasné, jak takové znáhodnění vypadá

Smíšené strategie

Standardní simplex $S_m := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$

Smíšená strategie

- hráče 1 je vektor $\mathbf{x} \in S_m$
- hráče 2 je vektor $\mathbf{y} \in S_n$

Střední hodnota výplaty hráče 1

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} x_i y_j = \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}$$

Rozšíření maticové hry

Maticové hra se smíšenými strategiemi

1. Hráči 1 a 2 (řádkový a sloupcový)
2. Hráči volí smíšené strategie $\mathbf{x} \in S_m$ a $\mathbf{y} \in S_n$
3. Výplatní funkce hráče 1 je $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{y}$,
   výplatní funkce hráče 2 je $-E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

- Množiny smíšených strategií jsou konvexní polyedry
- Garanční/rovnovážné řešení rozšíříme na smíšené strategie

Garanční řešení ve smíšených strategiích

Definice

Dvojice $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_m \times S_n$ je garančním řešením, platí-li

$$\min_{\mathbf{y} \in S_n} \mathbf{x}^{*\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} = \max_{\mathbf{x} \in S_m} \min_{\mathbf{y} \in S_n} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}$$

$$\max_{\mathbf{x} \in S_m} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}^* = \min_{\mathbf{y} \in S_n} \max_{\mathbf{x} \in S_m} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}$$

Pro každou maticovou hru existuje garanční řešení $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ a platí

$$\overbrace{\max_{\mathbf{x} \in S_m} \min_{\mathbf{y} \in S_n} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}}^{\underline{v}} \quad \leq \quad \mathbf{x}^{*\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}^* \quad \leq \quad \overbrace{\min_{\mathbf{y} \in S_n} \max_{\mathbf{x} \in S_m} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y}}^{\overline{v}}$$

Von Neumannova věta o minimaxu (1928)

Věta

Pro každou maticovou hru $\mathbf{A}$ platí

$$\overbrace{\max_{\mathbf{x}\in S_m}\min_{\mathbf{y}\in S_n}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}}^{\underline{v}} = \overbrace{\min_{\mathbf{y}\in S_n}\max_{\mathbf{x}\in S_m}\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}}^{\overline{v}}$$

- Hodnota $v := \underline{v} = \overline{v}$ se nazývá cena hry
- Při použití garančních strategií $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ hráč 1 dostane výplatu $\mathbf{x}^{*\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = v$ a hráč 2 dostane výplatu $-v$

Rovnovážné řešení ve smíšených strategiích

Definice

Dvojice $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_m \times S_n$ je rovnovážným řešením, platí-li

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* \leq \mathbf{x}^{*\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in S_m$ a $\mathbf{y} \in S_n$.

Tvrzení

Nechť $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \in S_m \times S_n$. Tyto výroky jsou ekvivalentní.

1. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ je garanční řešení.
2. $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ je rovnovážné řešení.

Platí-li 1. nebo 2., potom $\mathbf{x}^{*\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^* = v$.

Jak nalézt řešení maticové hry?

- Z pohledu prvního hráče maximalizujeme funkci

$$f(\mathbf{x}) := \min_{\mathbf{y} \in S_n} \mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} \qquad \text{za podmínky } \mathbf{x} \in S_m$$

- Ekvivalentní úloha je maximalizovat $u \in \mathbb{R}$ za podmínek

$$f(\mathbf{x}) \geq u, \qquad \mathbf{x} \in S_m$$

- Ekvivalentní úloha je maximalizovat $u \in \mathbb{R}$ za podmínek

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{y} \geq u, \forall \mathbf{y} \in S_n, \qquad \mathbf{x} \in S_m$$

- Ekvivalentní úloha je maximalizovat $u \in \mathbb{R}$ za podmínek

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{e}_i \geq u, \forall i = 1, \ldots, n, \qquad \mathbf{x} \in S_m$$

Optimalizační formulace

Pro hráče 1

$$\begin{aligned} \text{maximalizovat} \quad & u \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \geq \begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u \end{pmatrix} \\ & \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Pro hráče 2

$$\begin{aligned} \text{minimalizovat} \quad & w \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{y} \leq \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} \\ & \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- **Duální** úlohy LP s optimálními řešeními $(\mathbf{x}^*, u^*)$ a $(\mathbf{y}^*, w^*)$
- Ze silné duality dostaneme $u^* = w^* = v$
- Z konstrukce úloh plyne, že $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ je řešení maticové hry

Závěrečné poznámky

- Pro uvedené duální programy lze přirozeně interpretovat **podmínky komplementarity**
- Online solver pro (nejen) maticové hry malé dimenze je k dispozici na `http://banach.lse.ac.uk`
- Řešení strategických her bez podmínky nulového součtu je nepoměrně komplikovanější úloha!

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitoly 11,12,14). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.

Y. Shoham and K. Leyton-Brown. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations*. Cambridge University Press, 2008.

R. Webster. *Convexity*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.