

Optimalizace

Fermat-Weberův problém

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Úloha na optimální umístění – geometrický medián

Fermat-Weberův problém

Pro zadané body $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ hledáme minimum funkce

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

- Norma je zde eukleidovská, jsou ale i jiné možnosti
- Pro $n \geq 2$ neexistuje vzorec pro řešení pomocí konečného počtu operací, nutno použít numerické metody
- To je v kontrastu s minimalizací funkce $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$, kde je řešením **těžiště** $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i$

Analytické vlastnosti

- Funkce $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|$ je **konvexní** (součet konv. funkcí)
- Gradient je $\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|}$ pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}_i$
- Pomocí konvexní analýzy lze ukázat, že minimum funkce f existuje a platí:

Věta

Nechť body $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ neleží na společné přímce.

- Existuje jediný bod minima \mathbf{x}^* funkce f
- Pokud $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{a}_i$ splňuje $\sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x}^* - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{a}_i\|} = \mathbf{0}$, pak je bodem minima

Případ $n = 1$

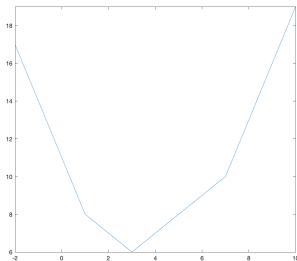
Úloha

Pro zadaná čísla $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ hledáme minimum funkce

$$f(x) = \sum_{i=1}^m |x - a_i|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

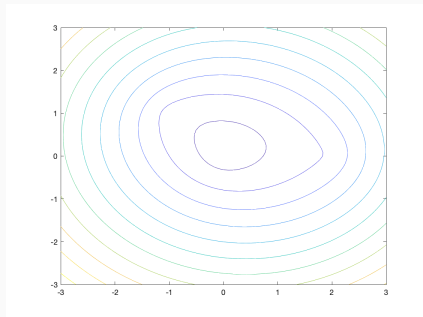
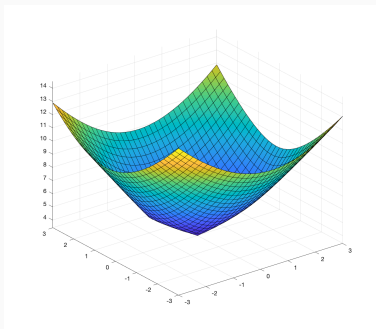
Řešením je **medián** čísel a_1, \dots, a_m .

Funkce f pro $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$



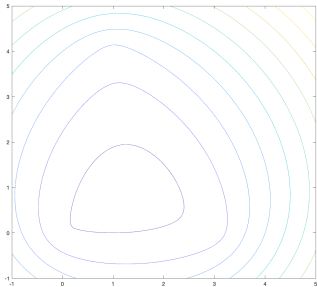
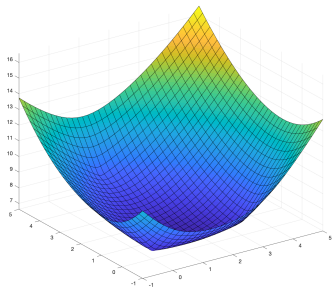
Případ (1) pro $n = 2$ a $m = 3$

- Funkce f pro $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 1)$
- Minima se nabývá v bodě \mathbf{a}_1 , kde funkce nemá derivaci
- V trojúhelníku $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ je úhel u vrcholu \mathbf{a}_1 větší než 120°



Případ (2) pro $n = 2$ a $m = 3$

- Funkce f pro $\mathbf{a}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4)$
- Minima se nabývá v bodě uvnitř trojúhelníka $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, který má všechny úhly ostré



Obecný případ pro $n = 2$ a $m = 3$

Předpoklad: body $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ neleží na přímce

Trojúhelník $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ má úhel větší než 120°

Řešením je vrchol \mathbf{a}_i , u něhož je úhel větší než 120°

Trojúhelník $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$ má úhly menší než 120°

Řešením je **Torricelliho bod** trojúhelníka $\triangle \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3$, tj. bod ze kterého jsou “vidět” všechny strany pod úhlem 120°

Numerický výpočet geometrického mediánu

- Geometrický náhled na situaci v \mathbb{R}^2 nepomůže v tom, jak řešení Fermat-Weberova problému najít v \mathbb{R}^n pro m bodů
- Iterační metoda na výpočet řešení je založena na pozorování, že podmínka $\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{x}-\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}_i\|} = \mathbf{0}$ je ekvivalentní

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

$$\text{kde } T(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_i\|} \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}_i\|}$$




- Tedy hledáme tzv. **pevný bod** zobrazení $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sum_{i=1}^m \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|} \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|}$$

Weiszfeld (1937)

1. Inicializace: $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, m$
2. Krok: $\mathbf{x}_{k+1} := T(\mathbf{x}_k)$, $k = 0, 1, \dots$

- Jde o gradientní metodu s délkou kroku $\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^m \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}_i\|}\right)^{-1}$
- Předpokládáme, že body $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ neleží na přímce
- Posloupnost $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ za rozumných podmínek konverguje ke geometrickému mediánu

-  T. Werner. *Optimalizace* (kapitoly 1,16). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
-  F. J. Aragón, M. A. Goberna, M. A. López, M. M. Rodríguez. *Nonlinear optimization*. Springer, 2019.
-  A. Beck and S. Sabach. Weiszfeld's method: Old and new results. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 164(1):1–40, 2015.