Optimalizace

Dualita v lineárním programování

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Obsah

Duální úloha LP

Primární úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Duální úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{aligned}$$

- Duální úlohu lze definovat pro úlohu LP v libovolné formě
- Duál duální úloha je primární úloha
- Dále budeme uvažovat výše uvedený tvar primární úlohy

Slabá dualita

Tvrzení

Pro každé přípustné primární řešení $\mathbf{x}$ a každé přípustné duální řešení $\mathbf{y}$ platí:

1. $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$
2. Pokud $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$, potom jsou $\mathbf{x}^*$ a $\mathbf{y}^*$ optimální řešení

- Duální LP zdola omezuje primární LP
- Pokud je mez těsná, nalezli jsme **optimum** obou úloh
- Silná dualita tvrdí i opak

Podmínky komplementarity

- I je indexová množina primárních omezení (duál. proměnných)
- J je indexová množina duálních omezení (prim. proměnných)

Věta

Nechť $\mathbf{x}$ je přípustné primární řešení a $\mathbf{y}$ je přípustné duální řešení. Rovnost $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ platí právě tehdy, když platí tyto podmínky:

1. $\sum_{j \in J} a_{ij} x_j = b_i$ nebo $y_i = 0$ $\quad \forall i \in I$
2. $x_j = 0$ nebo $\sum_{i \in I} a_{ij} y_i = c_j$ $\quad \forall j \in J$

Silná dualita

Věta

Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Primární úloha má optimální řešení $\mathbf{x}^*$.
2. Duální úloha má optimální řešení $\mathbf{y}^*$.

Pokud platí jedno z těchto tvrzení, pak $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^*$.

- Duální úloha nejen zdola omezuje primární úlohu, ale dokonce i nabývá hodnoty společného optima
- Nalezení společné hodnoty obou úloh LP tak poskytuje tzv. **certifikát optimality**

Vlastnosti primáru a duálu – možnosti

P/D	Má optimum	Neomezená	Nepřípustná
Má optimum	✓	ne	ne
Neomezená	ne	ne	✓
Nepřípustná	ne	✓	✓

- Červeně zakázané kombinace plynou ze silné duality
- Zbylá plyne ze slabé duality

Duální proměnné jako stínové ceny

P

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x_1 + 50x_2 \\ \text{z. p.} \quad & x_1, x_2 \geq 0, \\ & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{aligned}$$

D

$$\begin{aligned} \min \quad & 16y_1 + 11y_2 + 15y_3 \\ \text{z. p.} \quad & y_1, y_2, y_3 \geq 0, \\ & 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 30 \\ & y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 50 \end{aligned}$$

- **P** vyjadřuje maximalizaci příjmu výrobce z vyráběných produktů při zadaných materiálových omezeních
- **D** vyjadřuje minimalizaci výkupní ceny materiálů překupníkem tak, aby mu výrobce své zásoby prodal
- V optimu $\mathbf{x}^* = (7, 2)$ a $\mathbf{y}^* = (\frac{10}{3}, \frac{70}{3}, 0)$ o hodnotě 310 se chovají racionálně výrobce i překupník

Duální proměnné a citlivost primární úlohy

- Jak se změní hodnota úlohy $\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ při malé změně pravé strany $\mathbf{b}$?
- Pro vhodná $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ definujeme funkci

$$f(\mathbf{b}) = \min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \max\{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Věta

Má-li duální úloha pro dané $\mathbf{b}$ jediné optimální řešení $\mathbf{y}^*$, pak má funkce f v bodě $\mathbf{b}$ derivaci a platí $f'(\mathbf{b}) = \mathbf{y}^{*\mathsf{T}}$.

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 14). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
- J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.