Optimalizace

Konvexní množiny a polyedry

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Množina přípustných řešení v úloze LP

Úloha LP

$$\begin{aligned} \text{Minimalizuj} \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

- Soustava lineárních nerovnic určuje přípustná řešení
- Množina

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

  se nazývá konvexní polyedr

Teorie konvexních polyedrů

$$X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$$

- Množina přípustných řešení X v úloze LP má na rozdíl od jiných optimalizačních úloh výpočetně efektivní popis
- Geometrická struktura konvexního polyedru X je zachycena algebraickými podmínkami na matici $\mathbf{A}$ a vektor $\mathbf{b}$

Základní otázka

V jakých bodech množiny X se může nacházet řešení úlohy LP?

Teorie konvexních množin

- Konvexní množina
- Konvexní kombinace
- Konvexní obal
- Průnik konvexních množin je konvexní množina

Speciální případy lineární kombinace $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{x}_k$

- konvexní
- afinní
- nezáporná

Elementární konvexní množiny

Pomocí uzavřenosti na speciální lineární kombinace definujeme

- konvexní množinu
- afinní podprostor
- konvexní kužel

Dále lze definovat odpovídající druhy obalů zadaných vektorů.

Konvexní polyedry

Příklady konvexních polyedrů

- Uzavřený poloprostor $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
- Nadrovina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b\}$, kde $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$
- Afinní podprostor $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$
- Hyperkrychle $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1\}$
- Standardní simplex $\left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\right\}$

Dimenze konvexního polyedru je dimenze jeho afinního obalu.

Extremální body

Definice

Nechť X je konvexní množina. Bod $\mathbf{x} \in X$ je extremální, pokud

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X, \;\; \mathbf{x} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

- Konvexní množina nemusí mít žádný extremální bod
- Nalézt extremální body konvexní množiny je klíčová úloha
- Extremální body konvexního polyedru mají přehledný popis

Extremální body polyedru

- $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vyberme neprázdnou množinu indexů $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ a označme odpovídající matici $\mathbf{A}_I$ a vektor $\mathbf{b}_I$

Věta

Nechť $\mathbf{x} \in X$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Bod $\mathbf{x}$ je extremální.
2. Existuje $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tak, že $\mathbf{A}_I\mathbf{x} = \mathbf{b}_I$ a matice $\mathbf{A}_I$ má lineárně nezávislé sloupce.

Jak generovat extremální body polyedru?

Nabízí se následující přímočarý a neefektivní postup.

Algoritmus

- Vygeneruj množinu $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$
- Vyřeš soustavu $\mathbf{A}_I \mathbf{x} = \mathbf{b}_I$
- Existuje-li jediné řešení $\mathbf{x}$ a $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, pak je $\mathbf{x}$ extremální bod

Problém

Počet extremálních bodů některých polyedrů je exponenciální v m.

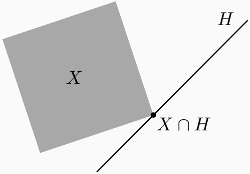
Opěrná nadrovina

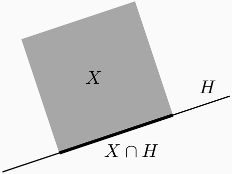
Opěrná nadrovina konvexní množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je nadrovina

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} = b\}$$

taková, že

1. $X \cap H \neq \emptyset$,
2. $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x} \geq b$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.





Stěny polyedru

Definice

Je-li H opěrná nadrovina polyedru X, pak množina $X \cap H$ se nazývá stěna polyedru.

- Vrchol je stěna dimenze 0
- Hrana je stěna dimenze 1
- Faseta je stěna dimenze $\dim X - 1$

Bod $\mathbf{x} \in X$ je vrchol, právě když je to extremální bod.

Kdy má polyedr extremální bod?

Věta

Nechť $X \neq \emptyset$ je konvexní polyedr. Tato tvrzení jsou ekvivalentní.

1. Polyedr X má alespoň jeden extremální bod.
2. Polyedr X neobsahuje přímku.

Příklady

- omezený konvexní polyedr
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$
- $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

Kde může mít lineární funkce na polyedru minimum?

Věta

Nechť X je konvexní polyedr neobsahující přímku a lineární funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ má na X minimum. Potom existuje extremální bod, v němž f nabývá minima.

- Označme $\mathbf{x}^* \in X$ bod minima
- Pak $H \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}^*\}$ je opěrná nadrovina polyedru X v bodě $\mathbf{x}^*$
- Tudíž f nabývá minima na celé stěně $X \cap H$
- $X \cap H$ neobsahuje přímku, tedy má extremální bod

Co z toho plyne pro řešení úlohy LP?

Úlohu LP

$$\min\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \mid \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}}_{X}\}$$

nyní umíme vyřešit, pokud

- polyedr X neobsahuje přímku
- funkce $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$ má na X minimum
- umíme **efektivně** procházet extremální body poyledru X

Simplexová metoda řeší úlohu LP v plné obecnosti.

Reference

T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 11). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.

J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.