Optimalizace

Lineární programování

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Obsah

1. Úloha lineárního programování
2. Úloha celočíselného lineárního programování
3. Minimaxová úloha

Aplikace

- Optimalizace produkčních nebo dopravních kapacit
- Optimální přiřazení, toky v síti
- Aproximace, regrese

Úloha lineárního programování (LP)

Úloha

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{za podmínek} \quad & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

- Soustava lineárních nerovnic určuje přípustná řešení
- Maticový zápis pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ je

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- Uvedený tvar úlohy LP postihuje nerovnosti $\leq$ i rovnosti

Rovnicový tvar úlohy LP

Úloha

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Každou úlohu LP převedeme do tohoto tvaru pomocí 2 úprav:

1. Přidání nezáporné slackové proměnné pro každé omezení ve tvaru nerovnosti
2. Vyjádření neomezené proměnné x jako $x = x^+ - x^-$ pro $x^+ \geq 0$ a $x^- \geq 0$

Typické aplikace

Minimalizace nákladů na mix surovin $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových cen
- $\mathbf{A}$ udává množství látky i obsažené v surovině j
- $\mathbf{b}$ udává požadované množství jednotlivých látek v mixu

Minimalizuj celkovou cenu $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ z.p. $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Maximalizace zisku z vyráběných produktů $\mathbf{x}$

- $\mathbf{c}$ je vektor jednotkových zisků
- $\mathbf{A}$ udává spotřebu materiálu i při výrobě produktu j
- $\mathbf{b}$ udává disponibilní množství jednotlivých materiálů

Maximalizuj celkový zisk $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ z.p. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Úloha celočíselného LP (ILP)

Požadujeme, aby proměnné nabývaly celočíselných hodnot. Často:

Úloha ILP s binárními proměnnými

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \{0,1\}^n\}$$

LP relaxace této úlohy je úloha

$$\min\{\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in [0,1]^n\}.$$

- Je-li LP relaxace nepřípustná, původní úloha je nepřípustná.
- Optimální hodnota LP relaxace je dolním odhadem optimální hodnoty původní úlohy.

Nejlepší přiřazení

- Jsou zadány 2 množiny n objektů a ceny c_{ij} za jejich přiřazení
- Přiřazení reprezentujeme permutační maticí o složkách x_{ij}
- Hledáme přiřazení minimalizující celkovou cenu

Assignment Problem s binárními proměnnými $x_{ij} \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Nejlepší přiřazení – LP relaxace

Assignment Problem s proměnnými $x_{ij} \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{za podmínek} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

- LP relaxace i původní úloha mají stejnou optimální hodnotu
- Mezi optimálními řešeními LP relaxace existuje celočíselné

Nejmenší vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí neorientovaného grafu (V, E) je podmnožina $X \subseteq V$ taková, že každá hrana má aspoň jeden vrchol v X.

Minimal Vertex Cover s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, kde $i \in V$

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \geq 1, \quad \{i, j\} \in E \end{aligned}$$

Nechť y^* je optimální hodnota úlohy a y je optimální hodnota relaxované úlohy. Platí

$$\tfrac{1}{2} y^* \leq y \leq y^*.$$

Největší nezávislá množina

Podmnožina $X \subseteq V$ neorientovaného grafu (V, E) je nezávislá, pokud žádné dva vrcholy z X nejsou spojeny hranou.

Maximal Independent Set s proměnnými $x_i \in \{0, 1\}$, $i \in V$

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & \sum_{i \in V} x_i \\ \text{za podmínek} \quad & x_i + x_j \leq 1, \quad \{i, j\} \in E \end{aligned}$$

- Relaxace má přípustné řešení $x_i = \frac{1}{2}$ o hodnotě $\frac{1}{2}|V|$
- Tedy optimální hodnota LP relaxace splňuje $y \geq \frac{1}{2}|V|$
- Ovšem pro každý úplný graf je optim.hodnota úlohy $y^* = 1$

Minimaxová úloha LP

$$\text{Minimalizuj} \quad \max_{i=1}^{k}(\mathbf{c}_i^\mathsf{T}\mathbf{x} + d_i) \quad \text{z.p.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Transformace na úlohu LP využívá 2 důležité postřehy:

Epigrafový tvar úlohy

$$\min\{f(x) \mid x \in X\} = \min\{y \mid (x, y) \in X \times \mathbb{R},\ f(x) \leq y\}$$

Vyjádření maxima

$$\max_{i=1}^{n} a_i \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a_i \leq b,\ \ i = 1, \ldots, n$$

Norma

Definice

Funkce $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ je norma, pokud platí:

- $\|\mathbf{x}\| = 0$ právě tehdy, když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Tři příklady norem

- $\|\mathbf{x}\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
- $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

Přibližné řešení přeurčené soustavy v různých normách

Hledejme řešení úlohy $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$.

$p = 2$

Úloha má řešení ve smyslu nejmenších čtverců.

$p = \infty$

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP.

$p = 1$

Problém $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{m} |\mathbf{a}_i^\top \mathbf{x} - b_i|$ lze formulovat jako úlohu LP.

Lineární regrese pomocí 1-normy

Prokládáme data (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, vhodnou regresní funkcí

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) := \theta_1 \varphi_1(x) + \cdots + \theta_n \varphi_n(x),$$

kde malá část hodnot y_i představuje outliers (vychýlené hodnoty).

Úloha robustní regrese

$$\text{Minimalizuj} \quad \sum_{i=1}^{m} |y_i - f(x_i, \boldsymbol{\theta})| = \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}\|_1$$

Ekvivalentní lineární program

$$\min \left\{ \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{z} \mid -\mathbf{z} \leq \mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{z},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 11). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
- J. Matoušek, B. Gaertner. *Understanding and Using Linear Programming*, Springer, 2007.