Optimalizace

Reálné funkce a zobrazení, lokální extrémy

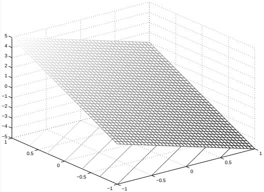
Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

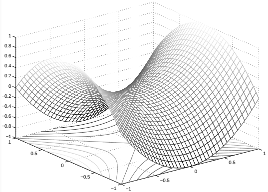
Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- Graf funkce f je množina $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$.
- Vrstevnice funkce f výšky y je množina $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = y\}$.

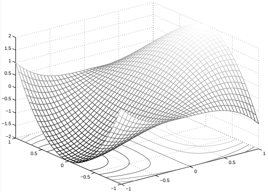
Příklady funkcí $f(x_1, x_2)$



$-2x_1 + 3x_2$



$x_1^2 - x_2^2$

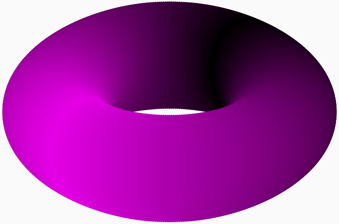


$3x_1 - x_1^3 - 3x_1x_2^2$

Zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

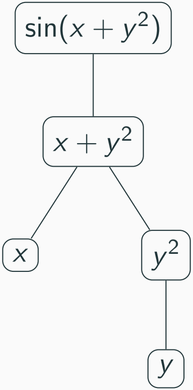
Příklady

- Afinní zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- Vektorové pole $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- Parametrizace toru
  $\mathbf{f}(u, v) = ((R + r\cos v)\cos u, (R + r\cos v)\sin u, r\sin v)$



Spojitost zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

- Definice pomocí limity
- Spojitost se zachovává skládáním funkcí, což vede na prakticky použitelnou postačující podmínku

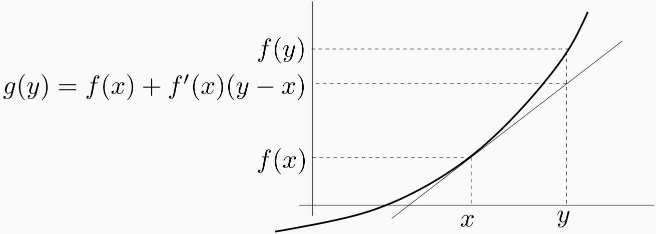


Derivace funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funkce f je diferencovatelná v bodě x, pokud existuje $a \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x) - a(y - x)}{y - x} = 0.$$

Číslo $a \in \mathbb{R}$ je derivace funkce f a píšeme $f'(x) \coloneqq a$.



Derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definice

Zobrazení $\mathbf{f}$ je diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}$, pokud existuje matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} = \mathbf{0}.$$

V okolí bodu $\mathbf{x}$ aproximujeme zobrazení $\mathbf{f}$ afinním zobrazením

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá derivace a píšeme $\mathbf{f}'(\mathbf{x}) := \mathbf{A}$.

Existence derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Existuje-li derivace zobrazení $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, platí

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Speciální případy $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

$$f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{g}'(x) = \begin{bmatrix} g_1'(x) & \ldots & g_m'(x) \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Věta

Existují-li v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace $\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ a funkce $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom má $\mathbf{f}$ derivaci.

Řetízkové pravidlo

Věta o derivaci složeného zobrazení

Pro diferencovatelná zobrazení

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\mathbf{f}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{h}:=\mathbf{g}\circ\mathbf{f}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "\mathbf{g}"] & \mathbb{R}^l \end{tikzcd}$$

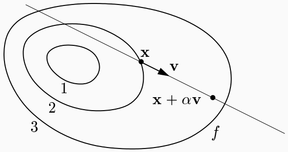
platí

$$\mathbf{h}'(\mathbf{x}) = \mathbf{g}'(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\mathbf{f}'(\mathbf{x}).$$

Směrová derivace

Směrová derivace zobrazení $\mathbf{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ v bodě $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je vektor

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\alpha} \in \mathbb{R}^m .$$



Tvrzení

Je-li zobrazení $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ diferencovatelné, pak jeho směrová derivace v bodě $\mathbf{x}$ ve směru $\mathbf{v}$ je rovna $\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{v}$.

Gradient

Gradient funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je

$$\nabla f(\mathbf{x}) := f'(\mathbf{x})^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

O čem vypovídá gradient funkce f v bodě $\mathbf{x}$?

Směrová derivace $f'(\mathbf{x})\mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x})^{\mathsf{T}}\mathbf{v}$ je

- maximální ve směru $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ a
- nulová ve směru $\mathbf{v} \perp \nabla f(\mathbf{x})$.

Parciální derivace druhého řádu

Věta

Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_i}$$

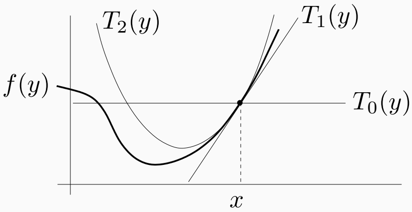
v bodě $\mathbf{x}$ existují a jsou v bodě $\mathbf{x}$ spojité, potom jsou si rovny.

Hessova matice je

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Taylorův polynom pro funkci $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Hledáme polynom k-tého stupně $T_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, který má v bodě $\mathbf{x}$ všechny parciální derivace až do řádu k stejné jako funkce f.



Taylorovy polynomy v bodě x do stupně dva

$$T_0(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$$

$$T_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$T_2(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^\top f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

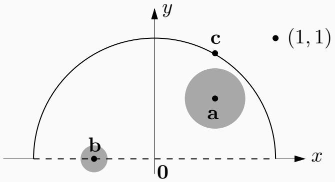
Vnitřek a hranice množiny

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je její

- vnitřní bod, pokud existuje $\epsilon > 0$ takové, že $B_\epsilon(\mathbf{x}) \subseteq X$,
- hraniční bod, pokud pro každé $\epsilon > 0$ je $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap X \neq \emptyset$ a $B_\epsilon(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$.

Které body jsou vnitřní a které hraniční?

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y > 0\} \ \cup\ \{(1, 1)\}$$



Extrémy funkce na množině

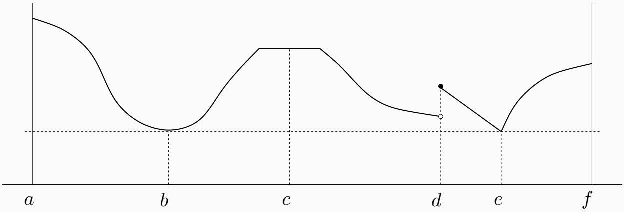
Funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nabývá na množině $X \subseteq \mathbb{R}^n$ v bodě $\mathbf{x} \in X$

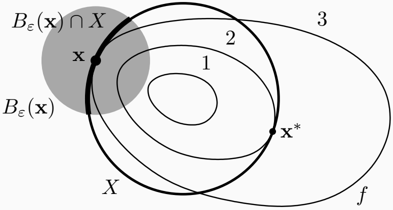
- minima, pokud $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X$,
- lokálního minima, pokud existuje $\epsilon > 0$ tak, že $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}')$ pro všechna $\mathbf{x}' \in X \cap B_\epsilon(\mathbf{x})$.

(Lokální) minimum v bodě $\mathbf{x}$ je

- volné, pokud $\mathbf{x}$ je vnitřním bodem množiny X,
- vázané, pokud $\mathbf{x}$ je hraničním bodem množiny X.

Extrémy funkce na množině – příklady





Podmínka prvního řádu

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v $\mathbf{x}$. Je-li $\mathbf{x}$ lokální extrém funkce f na X, platí

$$f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Stacionární bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ splňuje $f'(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Podmínky druhého řádu

Věta

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in X$ je vnitřní bod množiny X a $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná v $\mathbf{x}$. Je-li $\mathbf{x}$ stacionární bod, platí:

- Pokud je $\mathbf{x}$ lokální minimum, pak je Hessova matice $f''(\mathbf{x})$ pozitivně semidefinitní.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ pozitivně definitní, pak je $\mathbf{x}$ ostré lokální minimum.
- Pokud je $f''(\mathbf{x})$ indefinitní, pak $\mathbf{x}$ není lokální extrém.

Sedlový bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ funkce $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je stacionární bod takový, že $f''(\mathbf{x})$ je indefinitní.

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 8). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
- J. Hamhalter a J. Tišer. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. FEL ČVUT, 2005. https://math.feld.cvut.cz/tiser/difpocet.html
- *Matlab Activities for Multivariable Calculus.* https://mse.redwoods.edu/darnold/math50c/matlab/