Optimalizace

Spektrální rozklad a kvadratické funkce

Tomáš Kroupa

FEL ČVUT

Vlastní čísla a vektory

Nechť pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ a $\lambda \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}.$$

Pak λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{v}$ je vlastní vektor příslušný λ.

λ je vlastní číslo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

$\mathbf{v}$ je vlastní vektor

$$\mathbf{v} \in \operatorname{null}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$$

Diagonalizovatelné matice

Definujme

$$\mathbf{\Lambda} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad \text{a} \qquad \mathbf{V} := [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_n].$$

Potom $\mathbf{AV} = \mathbf{V\Lambda}$.

Matice $\mathbf{A}$ je diagonalizovatelná pokud je $\mathbf{V}$ regulární.

Spektrální rozklad

Pro diagonalizovatelnou matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^{-1} \qquad \text{a} \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV}.$$

Spektrální rozklad symetrické matice

Věta

Pro matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- $\mathbf{A}$ je symetrická.
- Všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou reálná a existuje ortogonální matice $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jejíž sloupce jsou vlastní vektory matice $\mathbf{A}$.

Tedy pro reálnou symetrickou matici $\mathbf{A}$ platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}^{\mathsf{T}} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^{\mathsf{T}} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \mathbf{v}_n^{\mathsf{T}}.$$

Pozitivní semidefinitnost

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně semidefinitní, pokud

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \quad \text{pro každé } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Tvrzení

Pro symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní.

1. $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitní.
2. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou nezáporná.
3. Existuje matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}$.
4. Všechny hlavní minory matice $\mathbf{A}$ jsou nezáporné.

Pozitivní definitnost

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní, pokud

$$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{pro každé } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Tvrzení

Pro symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou tato tvrzení ekvivalentní.

1. $\mathbf{A}$ pozitivně definitní.
2. Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ jsou kladná.
3. Existuje regulární matice $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathsf{T}} \mathbf{U}$.
4. Všechny vůdčí hlavní minory matice $\mathbf{A}$ jsou kladné.

Definitnost

Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je

- negativně semidefinitní, pokud $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
- negativně definitní, pokud $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- indefinitní, existuje-li $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tak, že $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} < 0 < \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$.

Pozorování

$\mathbf{A}$ je negativně definitní, právě když $-\mathbf{A}$ je pozitivně definitní.

Kvadratické formy

Kvadratická forma je homogenní polynom $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně 2, tj. pro nějakou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Poznámka

Pro každou kvadratickou formu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existuje dokonce symetrická matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Definitnost kvadratické formy f odpovídá definitnosti matice $\mathbf{A}$.

Extrémy kvadratické formy

Tvrzení

Uvažujme kvadratickou formu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Je-li f pozitivně semidefinitní, pak má f v bodě $\mathbf{0}$ minimum.
- Je-li f pozitivně definitní, pak má f v bodě $\mathbf{0}$ ostré minimum.
- Je-li f indefinitní, pak f nemá minimum ani maximum.

Analogicky pro negativně semidefinitní matice/maximum.

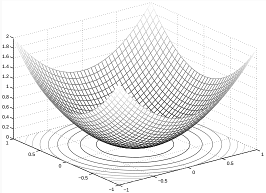
Diagonalizace kvadratické formy

Mějme kvadratickou formu f se symetrickou maticí $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Podle spektrální věty nalezneme diagonální matici $\mathbf{\Lambda}$ a ortogonální matici $\mathbf{V}$ splňující $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^\mathsf{T}$.
- Potom platí
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{V}}_{\mathbf{y}^\mathsf{T}}\mathbf{\Lambda}\underbrace{\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{x}}_{\mathbf{y}}.$$
- Dostaneme tak kvadratickou formu g s diagonální maticí $\mathbf{\Lambda}$,

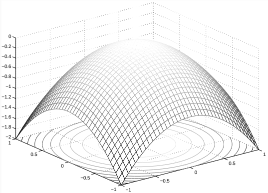
$$g(\mathbf{y}) := \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = f(\mathbf{x})$$

Některé kvadratické formy s diagonální maticí pro $n = 2$



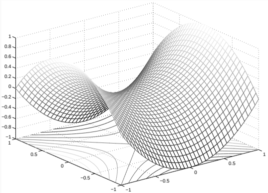
$$g(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$g(\mathbf{y}) = -y_1^2 - y_2^2$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



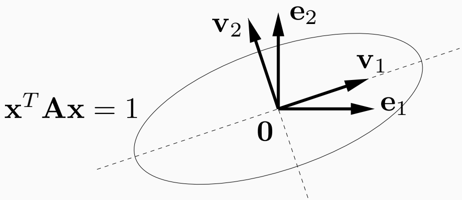
$$g(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diagonalizace kvadratické formy – geometricky

Příklad (Vrstevnice kvadratické formy)

- Kvadratická forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ v $\mathbb{R}^2$ s poz. definitní maticí $\mathbf{A}$ má vrstevnici výšky 1 ve tvaru pootočené/překlopené elipsy
- Elipsa má osy ve směru vlastních vektorů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$
- Délky poloos elipsy jsou $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ a $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$



Kvadratická funkce

Kvadratická funkce je polynom $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ druhého stupně, tj. pro nějakou symetrickou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c.$$

Jak nalézt extrémy kvadratické funkce?

Má-li kvadratická funkce extrém, existují $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a y_0 takové, že

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + y_0.$$

Potom je f až na posunutí a konstantu kvadratická forma, o typu extrému v bodě $\mathbf{x}_0$ rozhodneme podle definitnosti matice $\mathbf{A}$.

Kvadriky

Kvadrika je množina všech kořenů kvadratické funkce:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x} + c = 0\}.$$

Speciální případy

- Elipsoid ($\mathbf{A}$ je pozitivně definitní)
- Kuželosečka (pro $n = 2$)

Variační popis vlastních čísel

Věta (Courant–Fischer)

Nechť $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ jsou vlastní čísla sym. matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom platí

$$\lambda_1 = \min\{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

a

$$\lambda_n = \max\{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Reference

- T. Werner. *Optimalizace* (kapitola 6). Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2020.
- J. Velebil. *Abstraktní a konkrétní lineární algebra.* Elektronická skripta. FEL ČVUT, 2019.