Příklady k ACM semináři

Marko Berezovský, Jakub Černý

February 16, 2012

emails: berezovs@fel.cvut.cz, jacerny@gmail.com,

https://cw.felk.cvut.cz/doku.php/courses/a4b36acm/ls_2012/

Sudé týdny probíhá programovací soutěž, liché týdny trocha teorie a řešení úloh s tužkou a papírem.

1. Rozcvička

   (a) (Velbloud a banány) Jste v oáze, kde máte 3000 banánů, jednoho starého velblouda a slíbenou tučnou odměnu za každý banán, který dopravíte do jiné, 1000km vzdálené oázy. Problém je v tom, že váš velbloud unese nejvýše 1000 banánů a za každý ušlý kilometr mu musíte dát 1 banán, jinak s ním nehnete z místa. Kolik banánů zvládnete dopravit do druhé oázy?

   (b) (Lámání čokolády) Dostali jsme tabulku čokolády o rozměrech $n \times m$. Můžeme si vybrat, jestli ji budeme lámat podél delších a nebo kratších hran. Nalámané kousky můžeme rozlomit zase jen podél celé hrany. Na kolik nejméně a na kolik nejvíce zlomů můžeme rozlámat čokoládu na kostičky velikosti 1×1?

   (c) (Tramvaje) Na zastávce se potkaly 3 tramvaje s čísly 1, 12 a 20. Chtěl jsem si je vyfotit, ale nestihnul jsem to. 1čka jezdí každých 5min, 12ka každých 8 minut a 20ka každých 14minut. Jak dlouho bych musel čekat, kdybych je chtěl vidět znova všechny 3 naráz?

   (d) (Hrátky na šachovnici)

      i. Chceme proskákat šachovnici 8×8 šachovým koněm tak, abychom každé políčko šachovnice navštívili právě jednou. Spočítejte, kolika způsoby můžeme šachovnici proskákat, když začneme na A1 a chceme skončit na H8.

      ii. Dostali jsme šachovnici $n \times m$ nakreslenou na pneumatice. Můžeme si ji představit jako klasickou šachovnici $n \times m$, na které se průchodem přes okraj dostaneme na protější okraj. Kolik můžeme na takovou šachovnici rozmístit střelců, aby se vzájemně neohrožovali? (příklad: na šachovnice $1 \times n$ může být jen 1 střelec).

   (e) (n-té Fibonacciho číslo) Fibonacciho číslo F_n je určeno rekurencí následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Fibonacciho čísla jsou 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,... Napište program, který co nejrychleji vypíše prvních n-té fibonacciho číslo.
   VSTUP: $n \in \{1, ..., 1000\}$
   VÝSTUP: n-té fibonacciho číslo modulo 1000 (protože do 4b integeru se vejdou jen fibonacciho čísla pro $n < 49$).

      i. Ukažte, že hloupé rekurzivní řešení, které počítá přímo podle rekurence, má exponenciální časovou složitost.

      ii. Nalezněte řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(n)$.

      iii. Předchozí řešení zkuste ještě exponenciálně krát zrychlit. Nalezněte řešení s časovou složitostí $\mathcal{O}(\log n)$.

2. Dále budeme pokračovat řešením skutečných soutěžních úloh, které naleznete na
   https://cw.felk.cvut.cz/doku.php/courses/a4b36acm/ls_2012/