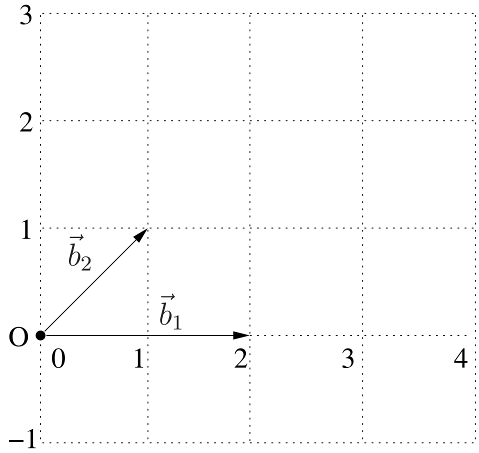
PRO'2013-Test-1-Examples

Jméno: **Body:**

1. Mějte dvě báze lineárního prostoru $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3]$ a $\beta' = [2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2, -\vec{b}_1, \vec{c}]$ Napište souřadnice vektoru $\vec{c}$ v bázi β, když

$$\text{pro} \quad \vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{je} \quad \vec{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. Následující obrázek zachycuje souřadnou soustavu $\sigma = (O, \beta)$ a bází $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.



(a) i. Najděte souřadnou soustavu $\sigma' = (O', \beta')$, $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$, jejíž bázový vektor $\vec{b}'_1$ má v bázi β souřadnice

$$\vec{b}'_{1\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a její počátek O' je v souřadné soustavě σ zaměřen vektorem

$$\vec{O}'_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a exituje bod X zaměřený vektorem $\vec{X}$ v σ a vektorem $\vec{X}'$ v σ' se souřadnicemi

$$\vec{X}_\beta = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}'_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a zakreslete ji do obrázku.

ii. Napište souřadnice vektoru $\vec{b}'_2$ v bázi β.

iii. Napište souřadnice vektor O v souřadné soustavě σ'.

iv. Napište souřadnice vektorů báze β v bázi β'.

(b) i. Najděte souřadnou soustavu $\sigma' = (O', \beta')$, $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$, když víte, že bázové vektory báze β mají v bázi β' souřadnice

$$\vec{b}_{1\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_{2\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a exituje bod X zaměřený vektorem $\vec{X}$ v σ a vektorem $\vec{X}'$ v σ' se souřadnicemi

$$\vec{X}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}'_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Soustavu zakreslete do obrázku.

ii. Napište souřadnice vektorů báze β' v bázi β.

iii. Napište souřadnice bodu O v souřadné soustavě σ' a bodu O' v souřadné soustavě σ.

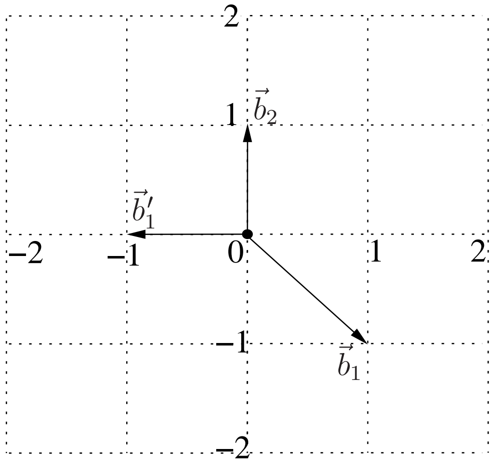
3. Najděte všechna řešení soustavy $\mathtt{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ pro

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Dokreslete do obrázku vektor báze $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ tak, aby matice přepočtu souřadnic z báze β do báze $\beta' = (\vec{b}_1', \vec{b}_2')$ byla ortogonální. Matici napište.



5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic a nakreslete je.

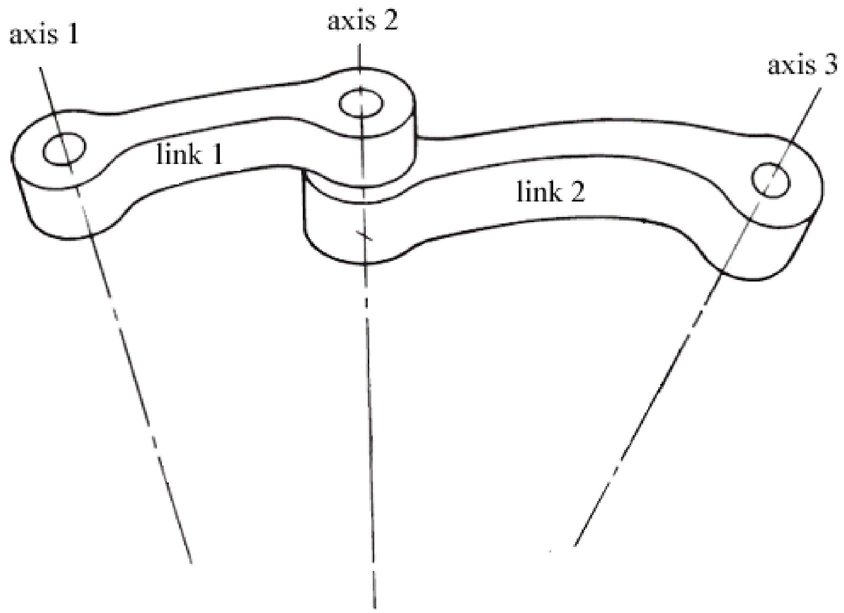
$$\mathtt{R} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{R} = \begin{bmatrix} -6/10 & 0 & -8/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8/10 & 0 & 6/10 \end{bmatrix}$$

6. Mějme manipulátor se třemi vzájemně mimoběžnými osami pohybu, jak ukazuje následující obrázek. Do obrázku

(a) zakreslete souřadné soustavy těles podle Denavit-Hartenberg notace;

(b) zakreslete všechny parametry i s jejich orientacemi, které jsou třeba k popisu manipulátoru v Denavit-Hartenberg notaci.



7. Napište nějakou matici s vlatními čísly $1, 2, -1, -3$.

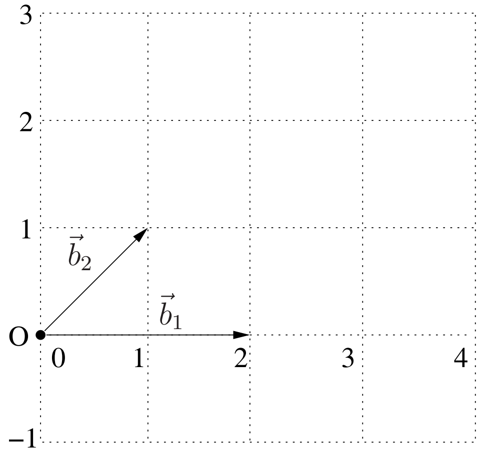
K řešení použijte další papíry, podepište je a přiložte je.

PRO'2013-Test-1-Examples-EN | Jméno: | Body:

1. Let us have two bases of linear space $\beta = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3]$ and $\beta' = [2\,\vec{b}_1 + \vec{b}_2, -\vec{b}_1, \vec{c}]$ Write the coordinates of vector $\vec{c}$ in basis β, when

$$\text{for} \quad \vec{x}_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{is} \quad \vec{x}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. The following picture shows a coordinate system $\sigma = (O, \beta)$ and a basis $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$.



(a) i. Find a coordinate system $\sigma' = (O', \beta')$, $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$, whose basis vector $\vec{b}'_1$ has in basis β coordinates

$$\vec{b}'_{1\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

and its origin O' is in the coordinate system σ described by vector

$$\vec{O}'_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and there exists point X described by vector $\vec{X}$ in σ and vector $\vec{X}'$ in σ' with coordinates

$$\vec{X}_\beta = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}'_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and draw it on the picture.

ii. Write the coordinates of vector $\vec{b}'_2$ in basis β.

iii. Write the coordinates of vector O in coordinate system σ'.

iv. Write the coordinates of basis vectors of β in basis β'.

(b) i. Find a coordinate system $\sigma' = (O', \beta')$, $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$, when you know that the basis vectors of basis β have in basis β' coordinates

$$\vec{b}_{1\beta'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_{2\beta'} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

and there exists point X described by vector $\vec{X}$ in σ and vector $\vec{X}'$ in σ' with coordinates

$$\vec{X}_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad \vec{X}'_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

draw the coordinate system on the picture.

ii. Write Write the coordinates of basis vectors of β' in basis β.
iii. Write the coordinates of point O in the coordinate system σ' and point O' in the coordinate system σ.

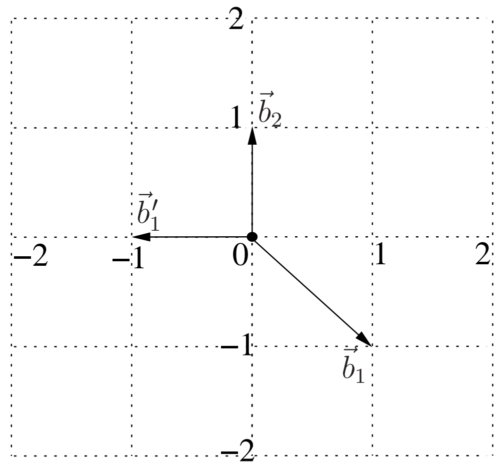
3. Find all solutions to system $\mathtt{A}\,\vec{x} = \vec{b}$ for

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

4. Draw on the picture a vector of basis $\beta = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ such that the transition matrix from basis β to basis $\beta' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$ was orthogonal. Write the matrix.



5. Find the eigenvalues and eigenvectors of following matrices and draw them.

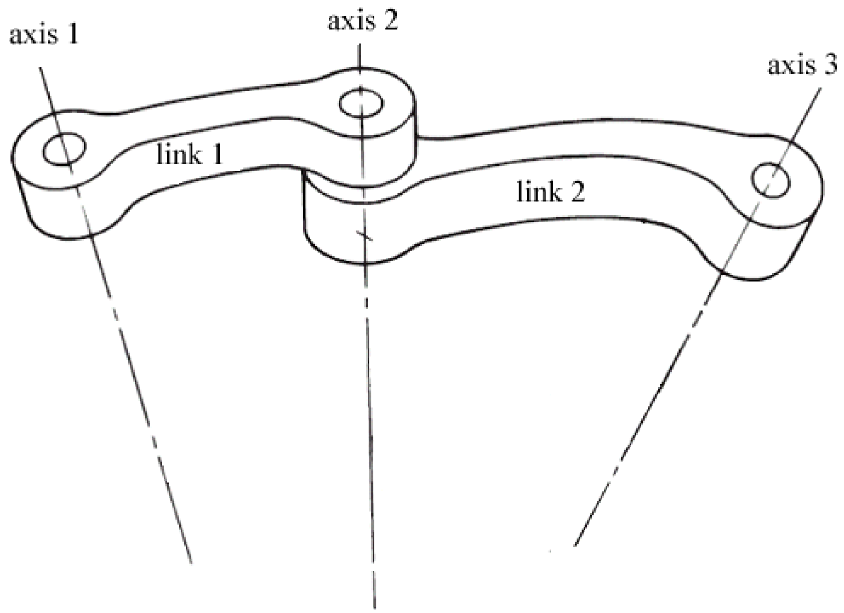
$$\mathtt{R} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{R} = \begin{bmatrix} -6/10 & 0 & -8/10 \\ 0 & -1 & 0 \\ -8/10 & 0 & 6/10 \end{bmatrix}$$

6. Let us have a manipulator with three axis of motion that do not intersect, as shown in the picture below. On the picture

(a) draw the coordinate systems of objects according to Denavit-Hartenberg notation;

(b) draw all parameters along with their orientation which are needed in the Denavit-Hartenberg notation.



7. Write some matrix with eigenvalues $1, 2, -1, -3$.

K řešení použijte další papíry, podepište je a přiložte je.