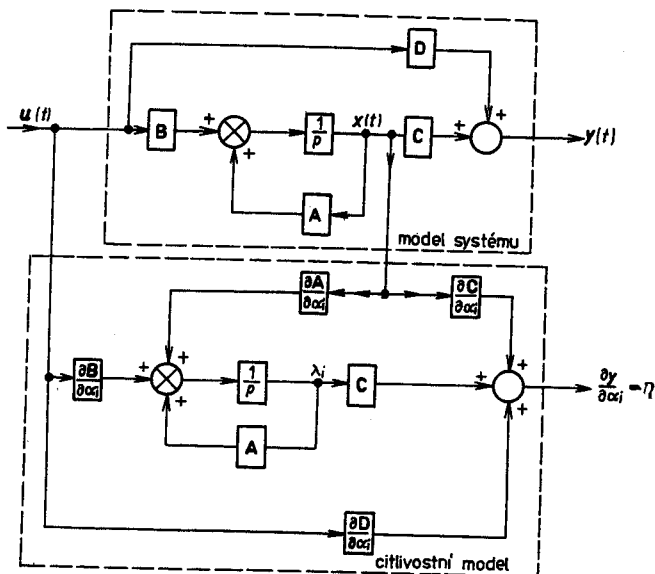


Vztahy (3.88) popisují tzv. citlivostní model systému. Citlivostní model systému má stejnou matici systému \mathbf{A} jako původní systém. Potřebujeme tolik citlivostních modelů, kolik je proměnných parametrů systému. Citlivostní funkce $\partial \mathbf{y} / \partial \alpha_i$ můžeme generovat pomocí simulace modelu systému a citlivostního modelu systému podle obr. 49.



Obr. 49. Simulace citlivostních funkcí pomocí citlivostního modelu systému

Lze ukázat [8], že pro systém s jednou vstupní a jednou výstupní veličinou je pro generování všech citlivostních funkcí možné použít pouze jeden citlivostní model. Všechny citlivostní funkce získáme jako lineární kombinace stavů citlivostního modelu. Toto tvrzení můžeme snadno odvodit transformací systému do Frobeniova kanonického tvaru.

3.2. Určení dynamických vlastností systémů

3.2.1. Metody identifikace

Abychom daný objekt mohli řídit tak, aby splňoval naše požadavky, musíme znát jeho vlastnosti. Je zřejmé, že čím lépe a přesněji chceme daný objekt řídit, tím přesněji a věrněji musíme poznat jeho vlastnosti.

Určování dynamických vlastností objektu spočívá v zjištění jeho matematického modelu, to je v určení dynamického systému na objektu. Tomuto problému říkáme identifikace systému. Při identifikaci můžeme v zásadě postupovat dvěma cestami – analytickou a experimentální.

Při analytickém přístupu vyjdeme z konstrukčních údajů daného objektu a podle fyzikálních nebo chemických zákonů sestavíme rovnice popisující vztahy

mezi veličinami v objektu. Těmito vztahy je určen dynamický systém na reálném objektu. Tomuto postupu říkáme identifikace systému matematicko-fyzikální analýzou reálného objektu.

Výhodou tohoto přístupu je to, že můžeme dynamické vlastnosti objektu určit před jeho realizací, a tak máme možnost změnou konstrukce ovlivňovat dynamické vlastnosti objektu.

Nevýhodou tohoto přístupu je, že vyžaduje důkladné znalosti příslušného oboru, do kterého zkoumaný objekt patří, a výsledky jsou mnohdy složité a výsledné vztahy je nutné vhodně aproximovat.

Analytickou cestou získáme vztahy mezi všemi veličinami v objektu. Z těchto vztahů snadno určíme stavové rovnice systému i vnější popis systému.

Při experimentální identifikaci systému určujeme vlastnosti objektu rozbořením průběhů vstupních a výstupních veličin objektu. Rozbořením vstupních a výstupních veličin objektu získáme matematický model vyjadřující vnější popis systému (např. přenos). Nevíme-li nic o struktuře identifikovaného objektu, nemůžeme ze získaného matematického modelu určit vnitřní strukturu systému.

Část potíží, na které při experimentální identifikaci narážíme, je způsobena tím, že identifikovaný objekt je obvykle součástí většího zařízení, a proto jej nemůžeme zkoumat izolovaně. Identifikovaný objekt musíme zkoumat v souvislosti s ostatním zařízením a často v takových podmínkách, v nichž nemůžeme odstranit působení ostatních veličin na zkoumaný objekt.

Zde se omezíme na metody experimentální identifikace, při kterých neuvažujeme působení náhodných veličin na objekt, ani neuvažujeme nepřesnosti měření. Jsou to tzv. deterministické metody identifikace. Deterministické metody identifikace jsou jednoduché a názorné. Je-li měření na objektu provedeno pečlivě, dosáhneme dobrých výsledků.

Uvažujeme-li, že na zkoumaný objekt působí náhodné veličiny nebo že jsou měřené veličiny zatíženy šumem, je nutné použít statistické metody identifikace. Statistické metody identifikace vyžadují mnohem větší soubory změřených dat a jejich zpracování je možné pouze s použitím počítačů.

Při zjišťování dynamických vlastností systémů je pravděpodobně nejvhodnější postup, který využívá matematicko-fyzikální analýzu objektu a získaný model systému porovnává s reálným objektem srovnáním experimentálně získaných dat s daty získanými simulací odezev matematického modelu pomocí počítače. Kombinace analytického a experimentálního přístupu je vhodná, neboť umožní proniknout do vnitřní struktury objektu a zároveň umožní ověřit přenos získaného modelu.

3.2.2. *Metody linearizace*

Vztahy mezi veličinami systému získané matematicko-fyzikální analýzou jsou velmi často popsány nelineárními funkcemi. Tyto nelineární vztahy linearizujeme v okolí pracovních bodů a převádíme je do bezrozměrného tvaru. Linearizo-

vané vztahy platí pro malé odchylky proměnných od pracovních bodů. Lineární modely systému hledáme a používáme proto, že se s nimi lépe pracuje, a také proto, že v mnoha případech s dostatečnou přesností vyhovují.

Linearizaci provádíme tak, že nelineární vztah rozvedeme v řadu a použijeme jen ty členy řady, které jsou lineárně závislé na proměnných veličinách, a ostatní členy zanedbáme.

Mějme např. statickou nelineární funkční závislost $y = f(x)$. V pracovním bodě x_0, y_0 platí $y_0 = f(x_0)$. V okolí pracovního bodu platí

$$y = y_0 + \Delta y = f(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} \Delta x + \varepsilon(\Delta x^2)$$

Zanedbáme-li zbytek $\varepsilon(\Delta x^2)$, platí pro přírůstky $\Delta y, \Delta x$

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} \Delta x = K \Delta x \quad (3.89)$$

kde zesílení K se rovná derivaci funkce $f(x)$ v bodě (x_0, y_0) .

Podobně pro funkci více proměnných: Mějme např. funkci dvou proměnných $y = f(x, v)$, kterou chceme linearizovat v pracovním bodě y_0, v_0, x_0 . Pro malé odchylky od pracovního bodu platí přibližně

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ v=v_0}} \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{\substack{x=x_0 \\ v=v_0}} \Delta v \quad (3.90)$$

Často místo absolutních hodnot proměnných používáme odchylku veličiny od pracovního bodu $\Delta x = x - x_0$, která je rozdílem skutečné hodnoty veličiny x a ustálené nebo vztahné hodnoty. Odchylka má rozměr fyzikální veličiny. Častěji proto používáme poměrnou odchylku, která je bezrozměrná

$$\varphi_x = \frac{x - x_0}{x_0} = \frac{\Delta x}{x_0}$$

Vztahná hodnota x_0 může být jmenovitá hodnota (např. štítkový údaj u elektrického stroje) nebo maximální hodnota příslušné veličiny. Potom poměrná odchylka je v celém rozsahu změn fyzikální veličiny číslo menší než jedna.

Příklad. Linearizujte a převedte na bezrozměrný tvar nelineární vztah (součin proměnných)

$$y(t) = kx(t)v(t)$$

v pracovním bodě

$$y_0 = kx_0v_0$$

V okolí pracovního bodu platí přibližně

$$y = y_0 + \Delta y = y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0 \\ v=v_0}} \Delta x + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)_{\substack{x=x_0 \\ v=v_0}} \Delta v = kv_0 \Delta x + kx_0 \Delta v$$

Zavedením bezrozměrných veličin

$$\varphi_y = \frac{\Delta y}{y_0}; \quad \varphi_x = \frac{\Delta x}{x_0}; \quad \varphi_v = \frac{\Delta v}{v_0}$$

dostaneme po úpravě lineární bezrozměrný vztah

$$\varphi_y = \varphi_x + \varphi_v$$

Linearizací nahradíme součin dvou proměnných součtem poměrných odchylek. Podobně lze linearizaci převést podíl dvou veličin na rozdíl poměrných odchylek.

Převod na bezrozměrné veličiny můžeme provádět i bez předchozí linearizace. Tento způsob je potom formálně úplně shodný se zobrazováním veličin při modelování systému na analogovém počítači.

Je-li závislost mezi veličinami vyjádřena implicitně vztahem

$$F(x, y) = 0$$

platí

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \Delta y = 0$$

Odtud pro odchylku od pracovního bodu platí

$$\Delta y = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}} \Delta x$$

Linearizovaný vztah pro bezrozměrné veličiny

$$\varphi_x = \frac{\Delta x}{x_0}, \quad \varphi_y = \frac{\Delta y}{y_0}$$

má tvar

$$\varphi_y = K\varphi_x$$

kde

$$K = - \frac{x_0}{y_0} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right]_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$$

Podobně můžeme linearizovat stavové rovnice systému. Mějme stavové rovnice nelineárního systému tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \tag{3.91}$$

Tyto stavové rovnice systému můžeme linearizovat pro malé odchylky proměnných od zvolených nominálních hodnot. Označme tyto nominální hodnoty $\mathbf{x}_0(t)$, $\mathbf{u}_0(t)$, $\mathbf{y}_0(t)$. Nominální hodnoty mohou být obecně funkcemi času, ale vždy splňují stavové rovnice (3.91).

Pro malé odchylky proměnných od nominálních hodnot můžeme nelineární funkce \mathbf{f} a \mathbf{g} ve vztahu (3.91) rozvinout v řadu. Potom platí

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}_0} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_0 + \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, t) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}_0} \mathbf{u} \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

Derivace vektorových funkcí \mathbf{f} a \mathbf{g} podle vektorů \mathbf{x} a \mathbf{u} jsou matice. Platí např.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Zavedeme označení

$$\mathbf{A}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{B}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}_0}, \quad \mathbf{C}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}_0}, \quad \mathbf{D}(t) = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{\mathbf{u}_0} \quad (3.93)$$

Po dosazení matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} podle (3.93) do rovnic (3.92) dostaneme lineární stavové rovnice linearizovaného systému

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.94)$$

3.2.3. Matematicko-fyzikální analýza vlastností objektu

Ve zkoumaném objektu probíhají určité fyzikální nebo chemické děje, které můžeme popisovat fyzikálními nebo chemickými zákony (např. D'Alembertův princip, Kirchhoffovy zákony, Maxwellovy rovnice, rovnice hmotnostní rovnováhy apod.).

Použitím těchto zákonů sestavíme systém integrodiferenciálních rovnic, které popisují dynamické vlastnosti systému.

Uvedeme zde několik příkladů analýzy dynamických vlastností různých objektů.

Dynamické vlastnosti stejnosměrného motoru

Stejnosměrný motor je systém, jehož výstupem je úhlová rychlost ω a vstupními veličinami jsou napětí na kotvě U , budící napětí U_b a zatěžovací moment M_z (obr. 50).

Diferenciální rovnice popisující chování motoru v přechodovém stavu mají tvar

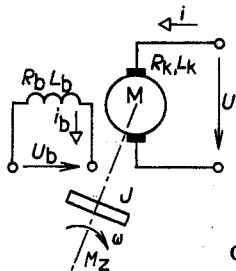
$$U = R_k i + L_k \frac{di}{dt} + KI_b \omega$$

$$U_b = R_b i_b + L_b \frac{di_b}{dt}$$

$$M_m = K i_b i$$

$$M_m = M_z + J \frac{d\omega}{dt}$$

Význam proměnných je zřejmý z obr. 50.

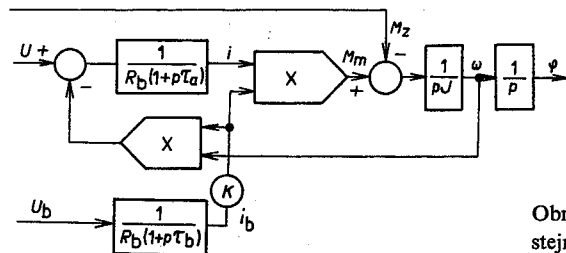


Obr. 50. Stejnoseměrný motor s cizím buzením

Poznámka. Momentová a napěťová konstanta K v první a třetí rovnici jsou v soustavě SI totožné, a proto je označíme bez indexu. Blokové schéma stejnosměrného motoru je na obr. 51, kde

$$\tau_a = \frac{L_k}{R_k} \text{ je časová konstanta v kotvě,}$$

$$\tau_b = \frac{L_b}{R_b} \text{ je časová konstanta budicího obvodu.}$$



Obr. 51. Blokové schéma stejnosměrného motoru

Pokud je výstupní veličinou systému poloha hřídele motoru, připojíme na výstup ještě jeden integrační člen (obr. 51). Vyloučením i , i_b , M_m dostaneme (po nutné linearizaci) závislost

$$\omega(p) = f[U(p), U_b(p), M_z(p)]$$

Nelineární vztahy linearizujeme podle dříve odvozených vztahů. Potom pro přírůstky proměnných platí

$$\Delta U = R_k \Delta i + L_k \Delta i' + K(I_{b0} \Delta \omega + \omega_b \Delta i_b) \quad (3.95)$$

$$\Delta U_b = R_b \Delta i_b + L_b \Delta i_b' \quad (3.96)$$

$$K(I_{b0} \Delta i + I_b \Delta i_b) = \Delta M_z + J \Delta \omega' \quad (3.97)$$

Linearizaci jsme odstranili součiny proměnných.

Odvozené vztahy převedeme do bezrozměrných tvarů zavedením bezrozměrných proměnných definovaných vztahy

$$y = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}; \quad u_1 = \frac{\Delta U}{U_0}, \quad u_2 = \frac{\Delta U_b}{U_{b0}}, \quad v = \frac{\Delta M_z}{M_{z0}}, \quad \alpha = \frac{\Delta I_b}{I_{b0}}, \quad \beta = \frac{\Delta I}{I_0}$$

kde U_0 je jmenovité napětí kotvy,

ω_0 úhlová rychlost při jmenovitých hodnotách U_0, U_{b0}, M_{z0} ,

I_0 jmenovitý proud při $M_z = M_{z0}$,

M_{z0} jmenovitý moment,

U_{b0} jmenovité budicí napětí,

I_{b0} proud procházející budicím vinutím při jmenovitém napětí U_{b0} .

Po dosažení těchto vztahů dostaneme z rovnice (3.95)

$$u_1 = \frac{R_k}{R_n} \beta + \frac{R_k}{R_n} \tau_a \beta' + \frac{KI_{b0}\omega_0}{U_0} (y + \alpha)$$

kde $R_n = \frac{U_0}{I_0}$ je tzv. jmenovitý odpor kotvy, který bývá nejméně desetkrát větší než odpor kotvy R_k .

Tento vztah upravíme do tvaru

$$u_1 = \frac{R_k}{R_n} (1 + \tau_a p) \beta + \left(1 - \frac{R_k}{R_n}\right) (y + \alpha)$$

Rovnice (3.96) upravená do bezrozměrného tvaru je

$$u_2 = \alpha(1 + p\tau_b)$$

Rovnice (3.97) v bezrozměrném tvaru je

$$\alpha + \beta = v + \frac{J\omega_0}{M_{z0}} y'$$

Koeficient u y' upravíme

$$\begin{aligned} \frac{J\omega_0}{M_{z0}} &= \frac{J\omega_0}{KI_0 I_{b0}} = \frac{JKI_{b0}\omega_0}{(KI_{b0})^2 I_0} = \frac{J(U_0 - R_k I_0)}{(KI_{b0})^2 I_0} = \frac{J}{(KI_{b0})^2} (R_n - R_k) = \\ &= \frac{JR_k}{(KI_{b0})^2} \left(\frac{R_n}{R_k} - 1\right) = \tau_m' \left(\frac{R_n}{R_k} - 1\right) \end{aligned}$$

kde τ_m je elektromechanická časová konstanta, která se rovná času, za který by se motor rozběhl konstantním momentem nakrátko $M = kI_{b0}U_0/R_k$ na jmenovitou úhlovou rychlost naprázdno $\omega = U_0/(kI_{b0})$.

Řešením odvozených rovnic

$$u_1 = \frac{R_k}{R_n} (1 + p\tau_a) \beta + \left(1 - \frac{R_k}{R_n}\right) (y + \alpha)$$

$$u_2 = \alpha(1 + p\tau_b)$$

$$\alpha + \beta = v + \tau \left(\frac{R_n}{R_k} - 1\right) y'$$

dostaneme obraz výstupní veličiny

$$y = \frac{u_1 \frac{R_n}{R_n - R_k} - v \frac{R_k}{R_n - R_k} (1 + p\tau_a) - u_2 \frac{1}{1 + p\tau_b} \left[1 - \frac{R_k}{R_n - R_k} (1 + p\tau_a) \right]}{1 + p\tau_m(1 + p\tau_a)} \quad (3.98)$$

Stejnoseměrný motor tedy lze považovat za statický řízený systém třetího řádu. Systém je stabilní (viz čl. 3.5) pro jakoukoli kombinaci časových konstant τ_m a τ_a . Systém je aperiodický, jsou-li koeficienty charakteristické rovnice reálné (samozřejmě záporné), což nastane pro

$$\tau_m > 4\tau_a$$

U většiny skutečných motorů je tato podmínka splněna. Tento vztah nemusí být splněn u motorů s extrémně malým momentem setrvačnosti nebo u motorů s uměle zvětšenou časovou konstantou v kotvě přídavnou indukčností (např. pro vyhlazování proudu kotvy při tyristorovém řízení motoru).

Přenos momentu (zde porucha v) na úhlovou rychlost má v čitateli zrychlující člen $(1 + p\tau_a)$, takže odezva na skok momentu začíná v nule s nenulovou derivací. (Uřčete jak velkou.)

Přenos budicího napětí (zde veličina u_2) na úhlovou rychlost je popsán diferenciální rovnicí 3. řádu. Přenos má znaménko minus, jak plyne z (3.98), a to znamená, že přibuzení má v ustáleném stavu za následek snížení otáček a naopak. Tento vztah je ovšem složitější, jak je zřejmé z (3.98). Pro

$$R_k = 0,5R_n$$

se úhlová rychlost v ustáleném stavu nemění při změně buzení (při linearizaci v okolí pracovního bodu). Pro

$$R_k > 0,5R_n$$

se naopak úhlová rychlost přibuzením v ustáleném stavu zvětší. Z toho můžeme učinit tento závěr: Je-li zatěžovací moment M_{z0} (který určuje pro dané U_0 proud kotvy I_0 a tím i velikost $R_n = U_0/I_0$) větší než polovina momentu nakrátko (což je moment M_{z0} pro $\omega = 0$), zmenší se úhlová rychlost odbuzením a naopak.

Dynamické vlastnosti obráceného kyvadla

Kyvadlo je balancováno pohyblivým vozíkem ve své nestabilní poloze (obr. 52).

Uvažujme pohyb pouze v jedné rovině – vozík se pohybuje pouze přímočaře. Kyvadlo má hmotnost m , moment setrvačnosti vzhledem k závěsu J a vzdálenost těžiště od bodu závěsu l . Vozík má hmotnost m_v a je poháněn motorem, který vyvozuje sílu $F(t)$.

V bodě závěsu působí na kyvadlo vertikální a horizontální síla $F_v(t)$ a $F_h(t)$. V těžišti působí síla $F_c(t) = mg$. Dynamický systém, který popisuje chování tohoto objektu má jednu výstupní veličinu – sílu $F(t)$ vyvozovanou motorem

na vozíku a dvě výstupní veličiny – polohu vozíku h a úhel vychýlení kyvadla z vertikální polohy φ .

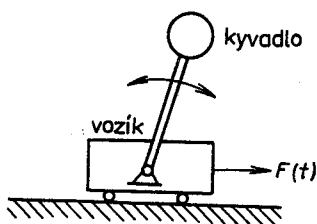
Zavedené veličiny jsou vázány diferenciálními rovnicemi

$$m \frac{d^2}{dt^2} [h(t) + l \sin \varphi(t)] = F_r(t)$$

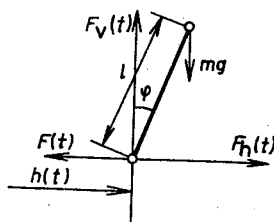
$$m \frac{d^2}{dt^2} [l \cos \varphi(t)] = F_v(t) - mg$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = l F_v(t) \sin \varphi(t) - l F_h(t) \cos \varphi(t)$$

$$m_v \frac{d^2}{dt^2} h(t) = F(t) - F_h(t) - B \frac{dh(t)}{dt}$$



Obr. 52. Kyvadlo balancované pohyblivým vozíkem



Obr. 53. Síly působící v bodě závěsu kyvadla

První rovnice vyjadřuje, že horizontální síla $F_h(t)$ je tvořena setrvačnou silou způsobenou pohybem hmoty kyvadla v horizontálním směru a silou způsobenou pádem kyvadla (obr. 53). Druhá rovnice platí obdobně pro vertikální sílu F_v . Třetí rovnice vyjadřuje rovnováhu setrvačných sil při otáčení kyvadla. Čtvrtá rovnice popisuje rovnováhu sil působících na vozík. Veličina B je konstanta viskózního tlumení. Po úpravě jsou předcházející rovnice

$$mh'' + ml\varphi'' \cos \varphi - ml(\varphi')^2 \sin \varphi = F_h$$

$$-ml\varphi'' \sin \varphi - ml(\varphi')^2 \cos \varphi = F_v - mg$$

$$J\varphi'' = lF_v \sin \varphi - lF_h \cos \varphi$$

$$m_v h'' = F - F_h - Bh'$$

Je-li hmotnost vozíku podstatně větší než je hmotnost kyvadla, můžeme ve čtvrté rovnici sílu F_h zanedbat, a tím odstranit vliv kyvadla na pohyb vozíku.

Z prvních tří rovnic vyloučíme síly F_v a F_h . Potom

$$J(\varphi'') = l \sin \varphi [mg - ml\varphi'' \sin \varphi - ml(\varphi')^2 \cos \varphi] - l \cos \varphi [mh'' + ml\varphi'' \cos \varphi - ml(\varphi')^2 \sin \varphi]$$

Po úpravě dostaneme

$$(J + ml^2) \varphi'' - mgl \sin \varphi + mlh'' \cos \varphi = 0$$

Z předcházejícího vztahu plyne

$$\varphi'' - \frac{g}{l_1} \sin \varphi + \frac{1}{l_1} h'' \cos \varphi = 0 \quad (3.99)$$

kde

$$l_1 = (J + ml^2)/ml$$

je tzv. efektivní délka kyvadla.

Systém je tedy popsán diferenciální rovnicí

$$\varphi'' - \frac{g}{l_1} \sin \varphi + \frac{1}{l_1} h'' \cos \varphi = 0$$

$$m_v h'' = F - Bh'$$

Předcházející dvě diferenciální rovnice druhého řádu převedeme snadno na čtyři diferenciální rovnice prvního řádu. Stavový vektor systému je

$$\mathbf{x} = [\varphi, \varphi', h, h']^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

Stavové rovnice systému jsou

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = \frac{g}{l_1} \sin x_1 + \frac{1}{l_1} \cos x_1 \left[\frac{F}{m_v} - \frac{B}{m_v} x_4 \right]$$

$$x_3' = x_4$$

$$x_4' = \frac{F}{m_v} - \frac{B}{m_v} x_4$$

Provedeme linearizaci těchto stavových rovnic kolem nominálního řešení $F(t) = 0$, $\varphi(t) = 0$, $h(t) = 0$. Matice linearizovaného systému jsou potom

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ g/l_1 & 0 & 0 & B/(l_1 m_v) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & B/m_v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{F}} \right)_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{m_v l_1} \\ 0 \\ \frac{1}{m_v} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Linearizované stavové rovnice snadněji získáme, budeme-li linearizovat přímo rovnici (3.99), která po linearizaci bude mít tvar

$$\varphi'' - \frac{g}{l_1} \varphi + \frac{1}{l_1} h'' = 0$$

Poznámka. Volíme-li stavové proměnné

$$\mathbf{x} = [h, h', h + l_1 \varphi, h' + l_1 \varphi']^T$$

potom z (3.103) přímo plynou stavové rovnice systému

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

čre platí za předpokladu, že matice \mathbf{A}_2 je regulární.

Příklad. Kinetická energie stejnosměrného motoru je

$$T = \frac{1}{2} J \varphi'^2 + \frac{1}{2} L q'^2 + \Phi(\varphi) q'$$

de J je moment setrvačnosti rotoru motoru,

L indukčnost kotvy,

φ poloha hřídele motoru,

i proud kotvy,

Φ magnetický tok.

tlumicí funkce R je

$$R = \frac{1}{2} R_k q'^2 + \frac{1}{2} B \varphi'^2$$

de R_k je odpor kotvy,

B tlumicí moment.

Stejný motor nemá žádnou potenciální energii. Vnější zobecněné síly jsou napětí na kotvě u a zatěžovací moment m . Lagrangeovy rovnice stejnosměrného motoru mají potom tvar

$$J \varphi'' + B \varphi' - \frac{d\Phi}{d\varphi} q' = -m$$

$$L q'' + R_k q' + \frac{d\Phi}{d\varphi} = u$$

Pro změnu toku v závislosti na poloze kotvy konstantní, platí

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = k$$

Diferenciální rovnice motoru mají známý tvar

$$J \varphi'' + B \varphi' + m = k i$$

$$L \frac{di}{dt} + R_k i + k \varphi' = u$$

4. Aproximace přechodových charakteristik

Přechodovou charakteristiku měříme na reálném objektu poměrně snadno, že nejprve ustálíme objekt v rovnovážném stavu a potom vstupní veličinu