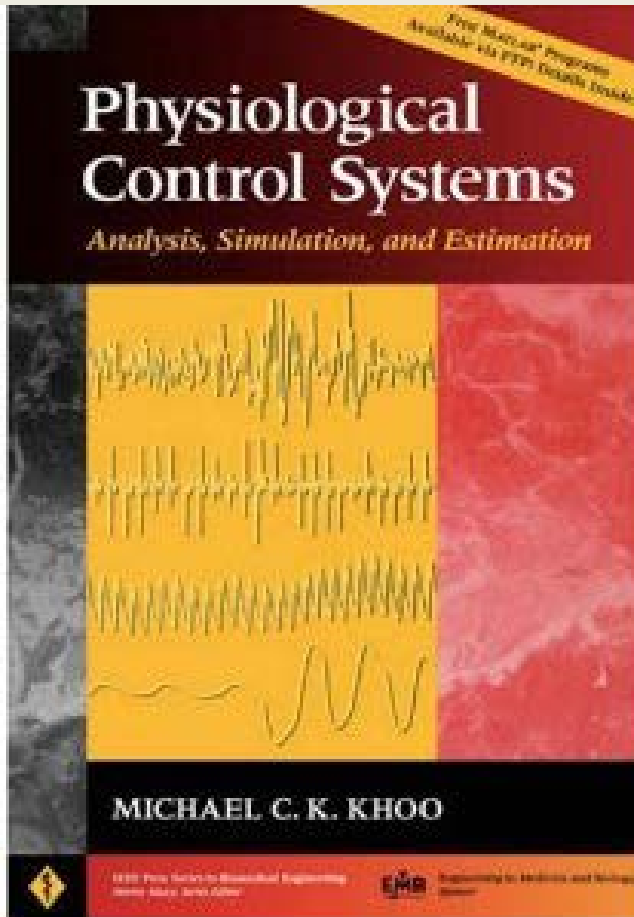


# Frekvenční analýza lineárních regulačních systémů

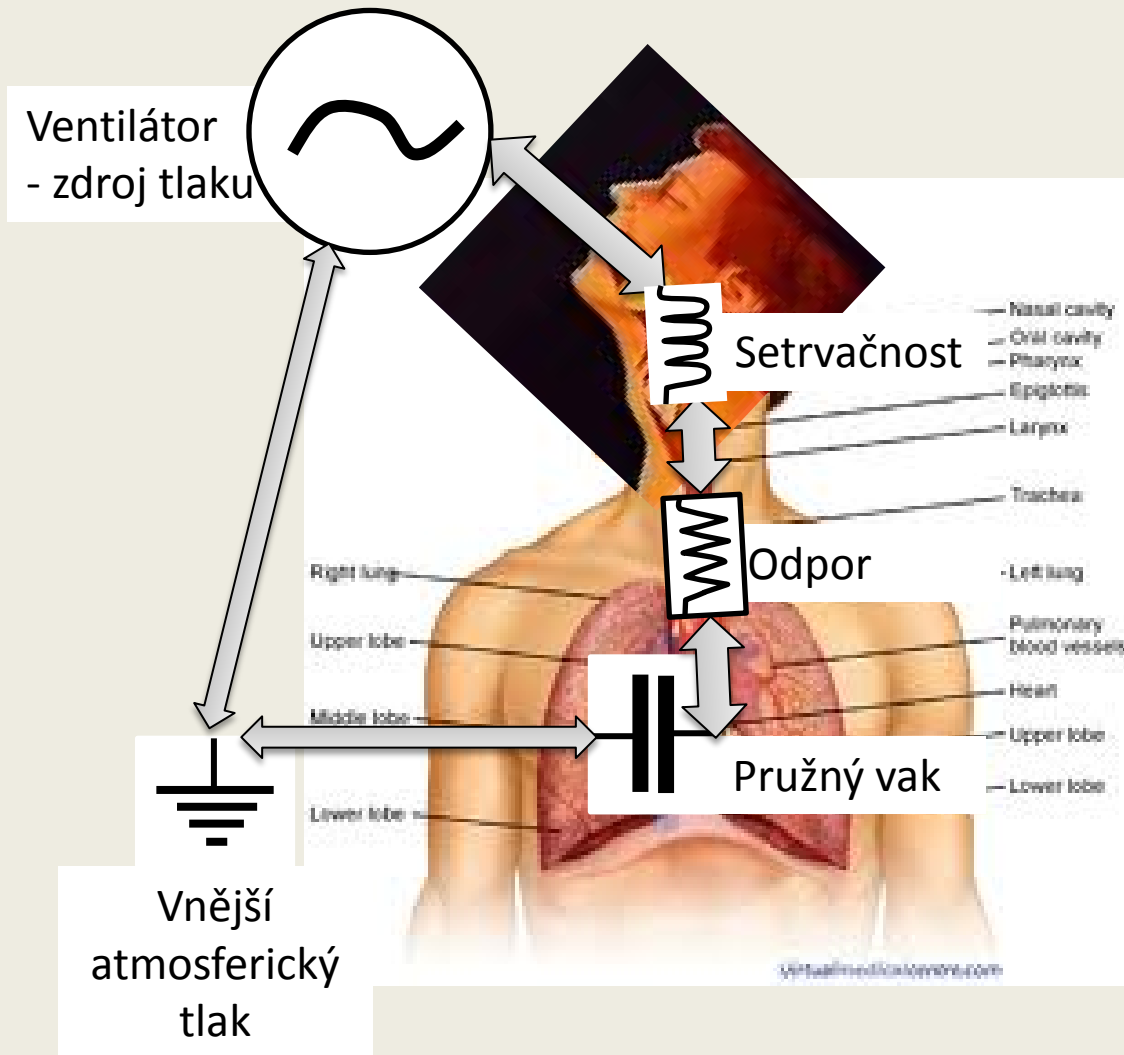
# Studijní materiál

## Chapter 5

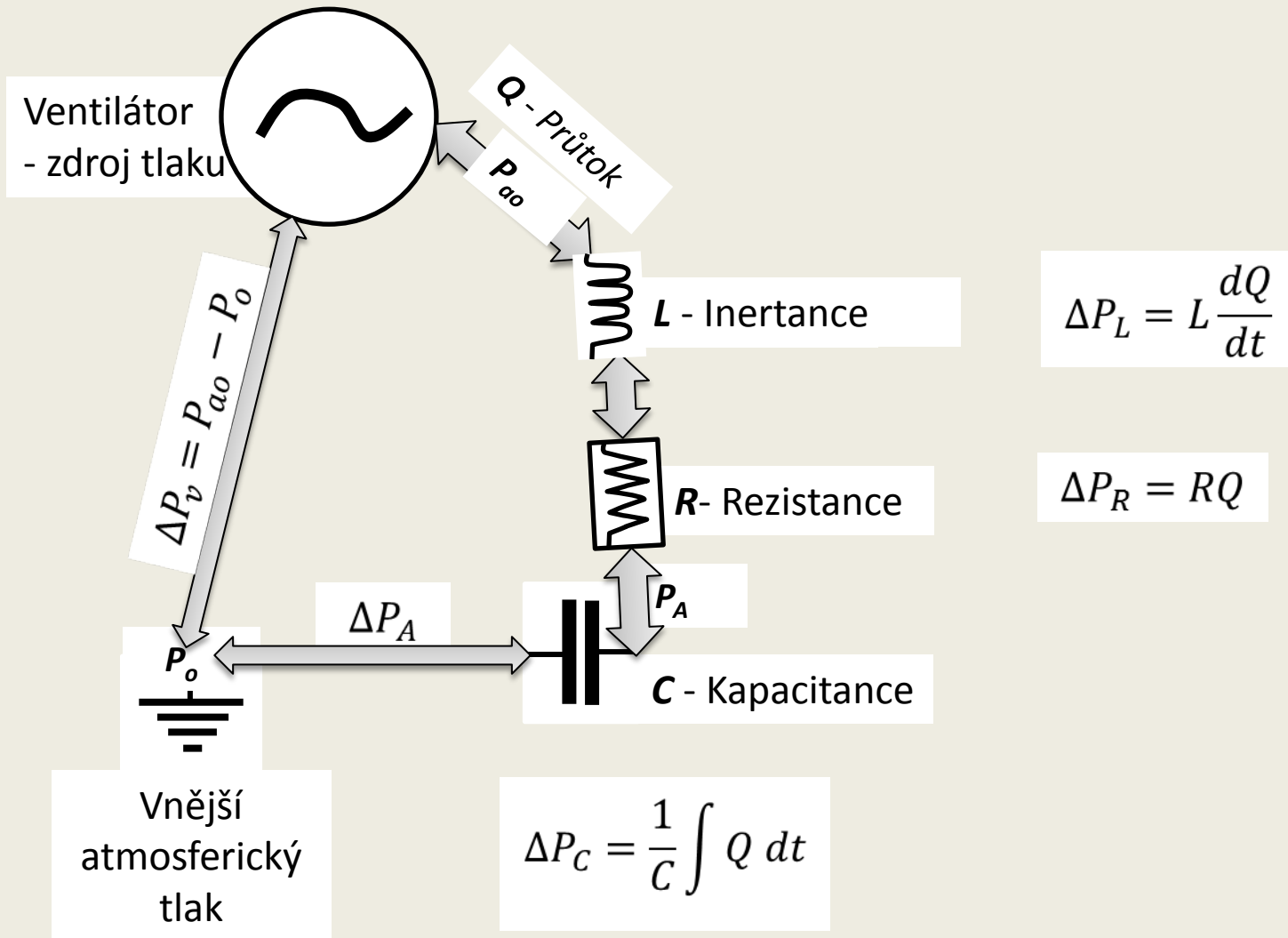
### Frequency-Domain Analysis of Linear Control Systems



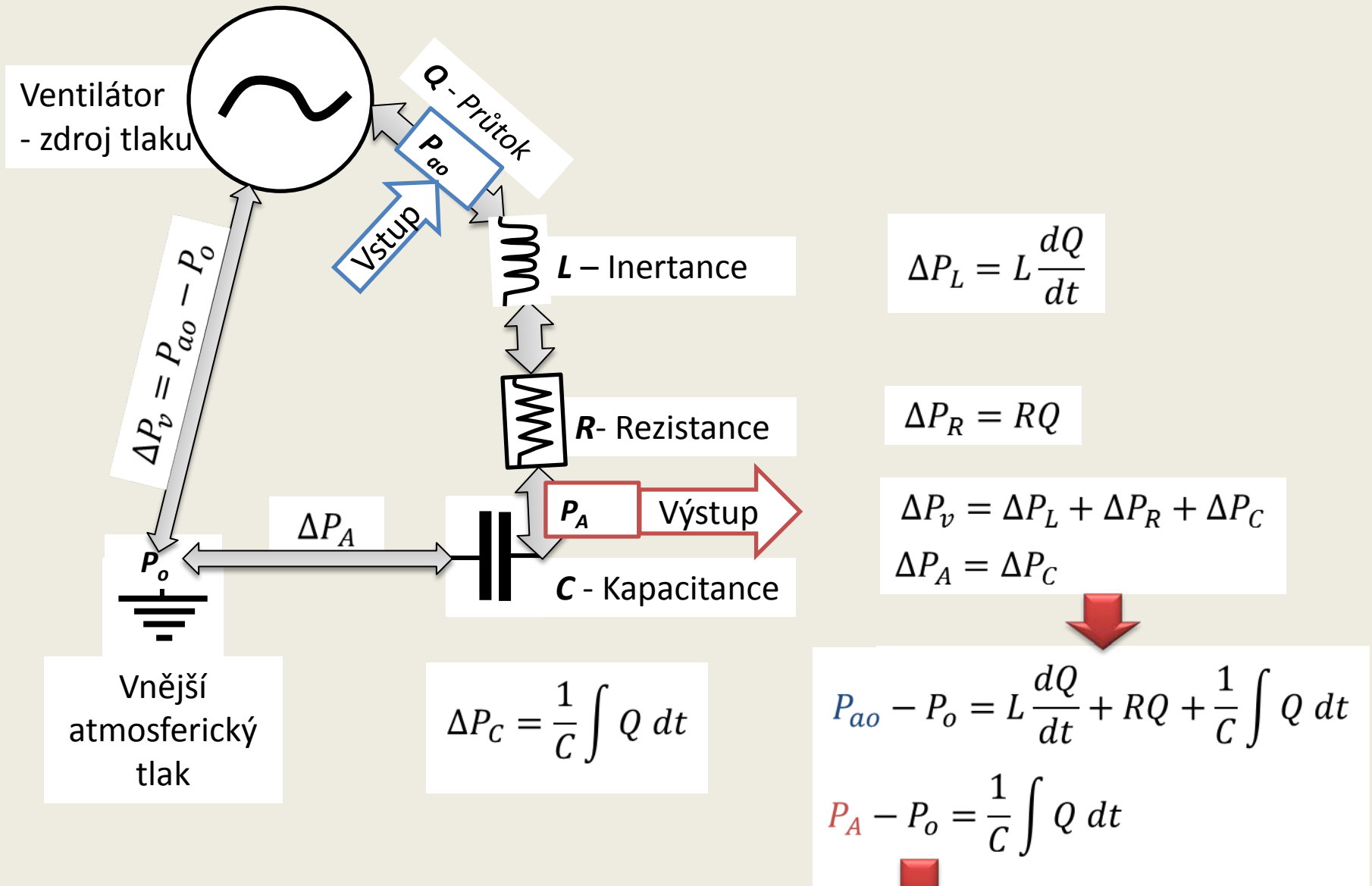
# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání

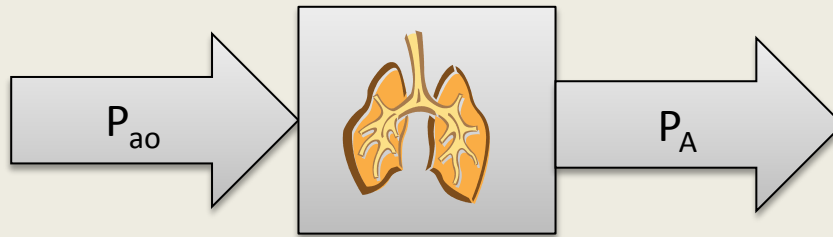


$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

← přenos

$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

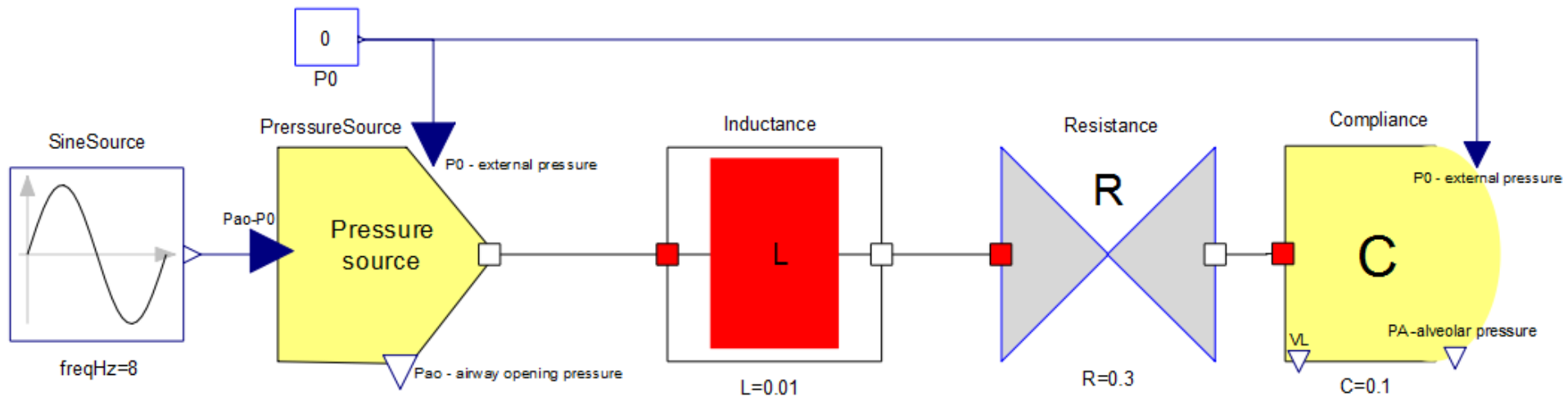
# Nejjednodušší model mechaniky dýchání



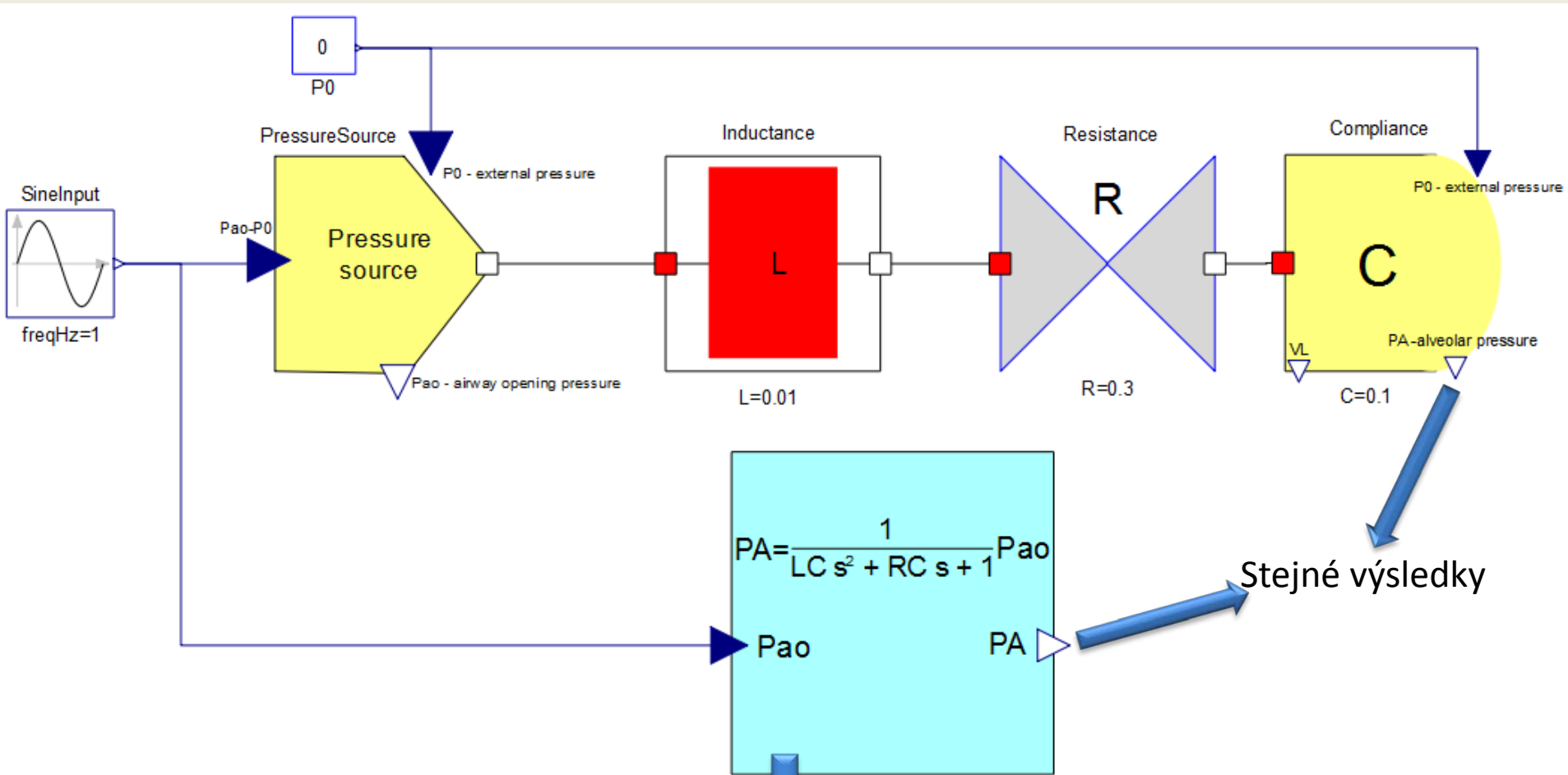
$$\frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)}$$

← přenos

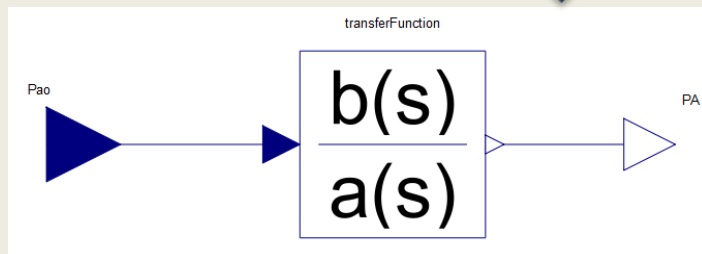
$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$



$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$



$$P_A = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} P_{ao}$$



$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

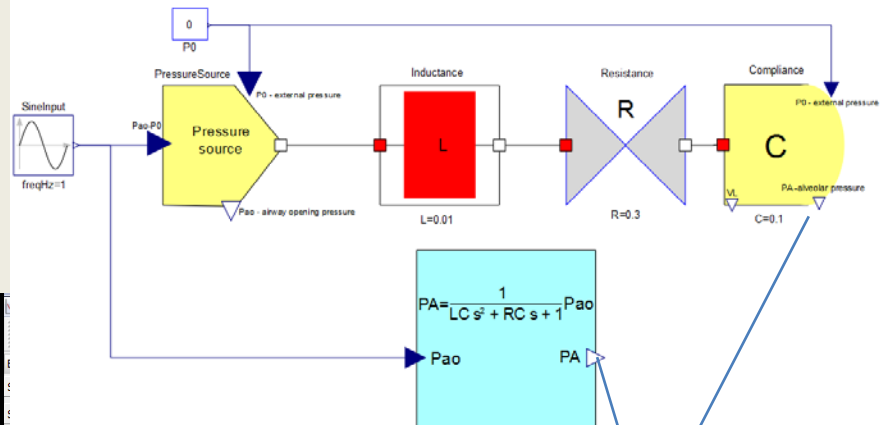
Parameters:

a: {L\*C,R\*C,1}

b: {1}



$$H(s) = \frac{Výstup}{Vstup} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



FrequencyInputSimplestRespiration 1: Compliance.PA — FrequencyInputSimplestRespiration 1: respiratoryTransferFunction1.PA

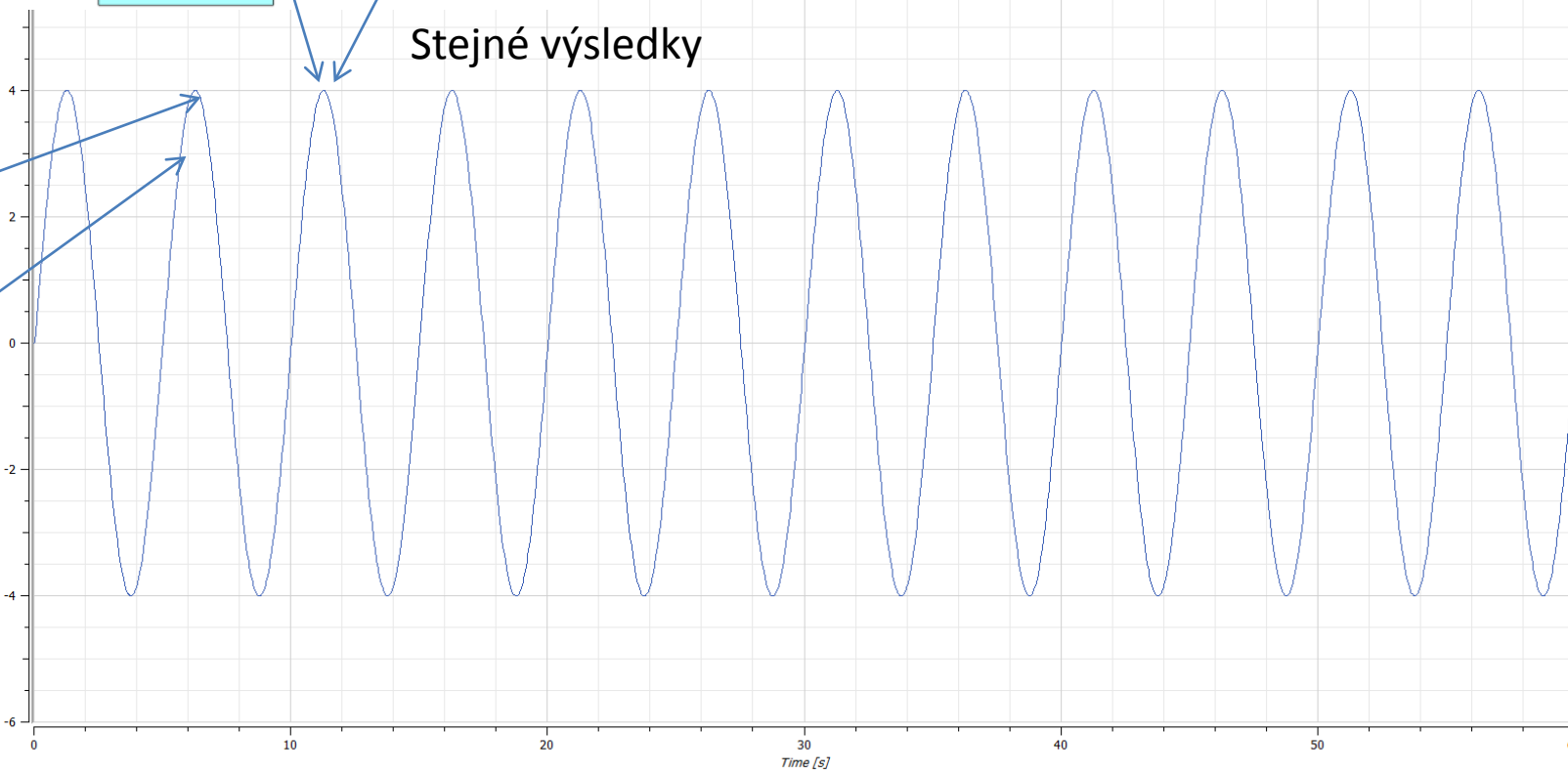
Stejné výsledky

FrequencyInputSimplestRespiration 1\*

Plot Parameters Variables Settings

Find Options

Name	Unit	Description
Compliance		
AirFlow		
StressedVolume	L	L/cm H2O
C	L/cm H2O	L/cm H2O
der(StressedVolu...		Derivative of Co...
FunctionalResidu...	L	L/cm H2O
P0	cm H2O	cm H2O
PA	cm H2O	Alveolar pressur...
TransmuralPressure	cm H2O	cm H2O
VL		
Inductance		
P0		
PressureSource		
Resistance		
respiratoryTransferFun...		
transferFunction		
C	L / cm H2O	L / cm H2O
L	cm H2O s <sup>2</sup> / L	cm H2O s <sup>2</sup> / L
PA	cm H2O s / L	cm H2O s / L
Pao		
R		
SineInput		



Simulation Log

```

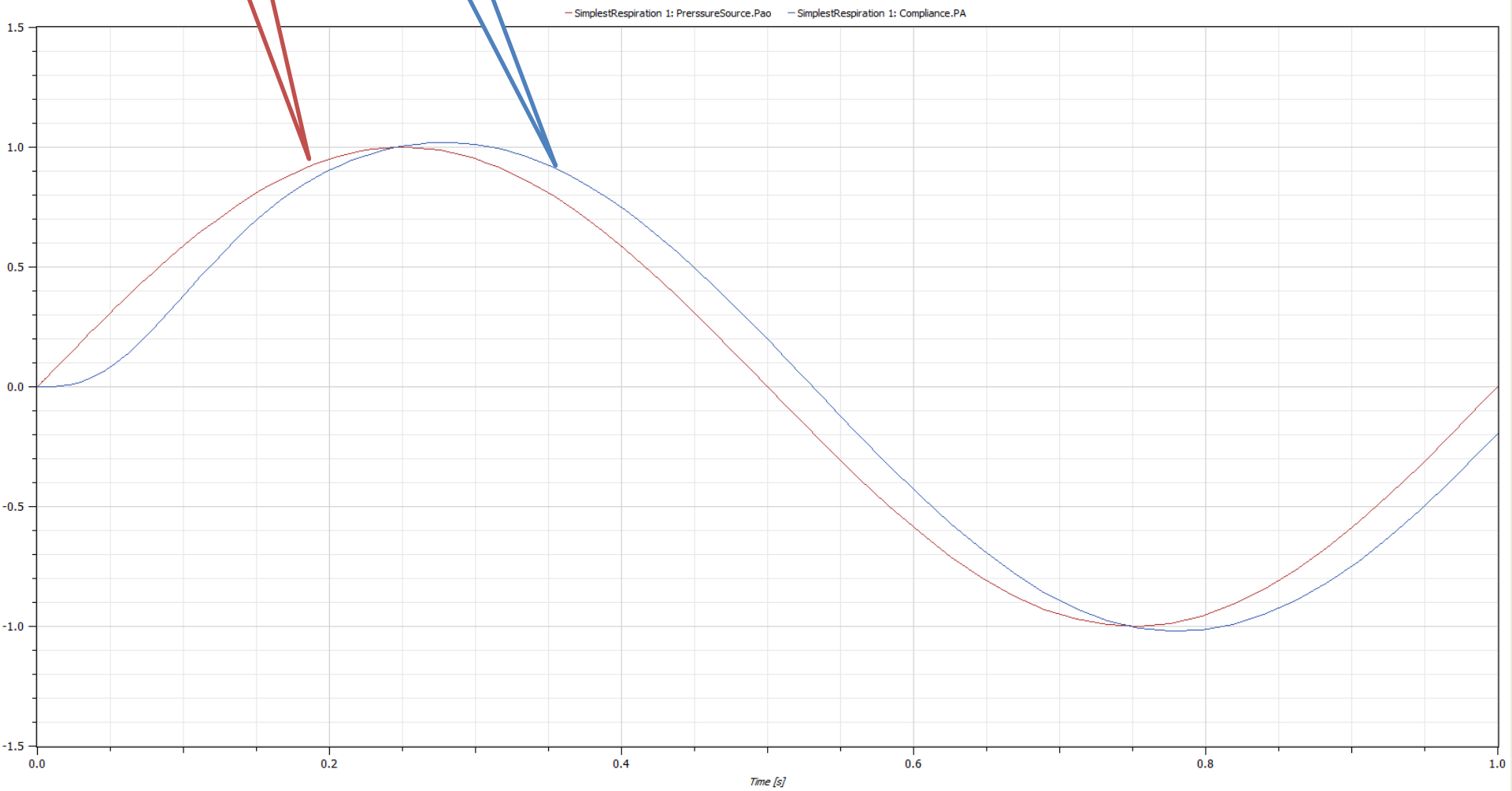
Server listening on 127.0.0.1:7407
Initialization finished.
Simulation stopped at time: 60
Simulation took 0.63 seconds of CPU time.
Total number of function evaluations: 11017
Total number of events: 1
Total number of step events (dynamic state switches): 0
Max step size: 0.108958
Min step size: 1.48769e-05
Simulation exited at 04:52:19

```

# Budící vstup - 1 Hz

Pao

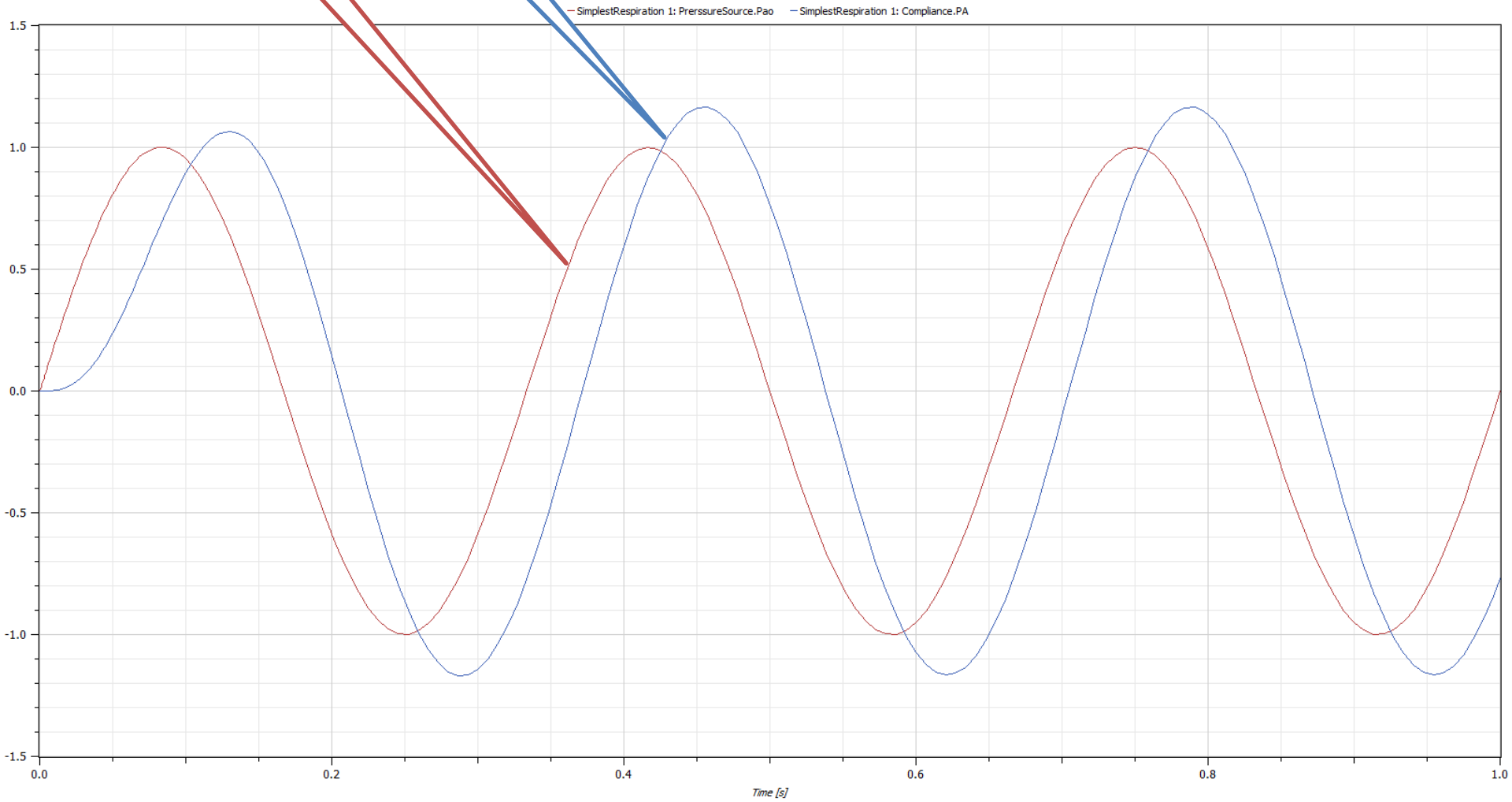
PA



# Budící vstup - 3 Hz

Pao

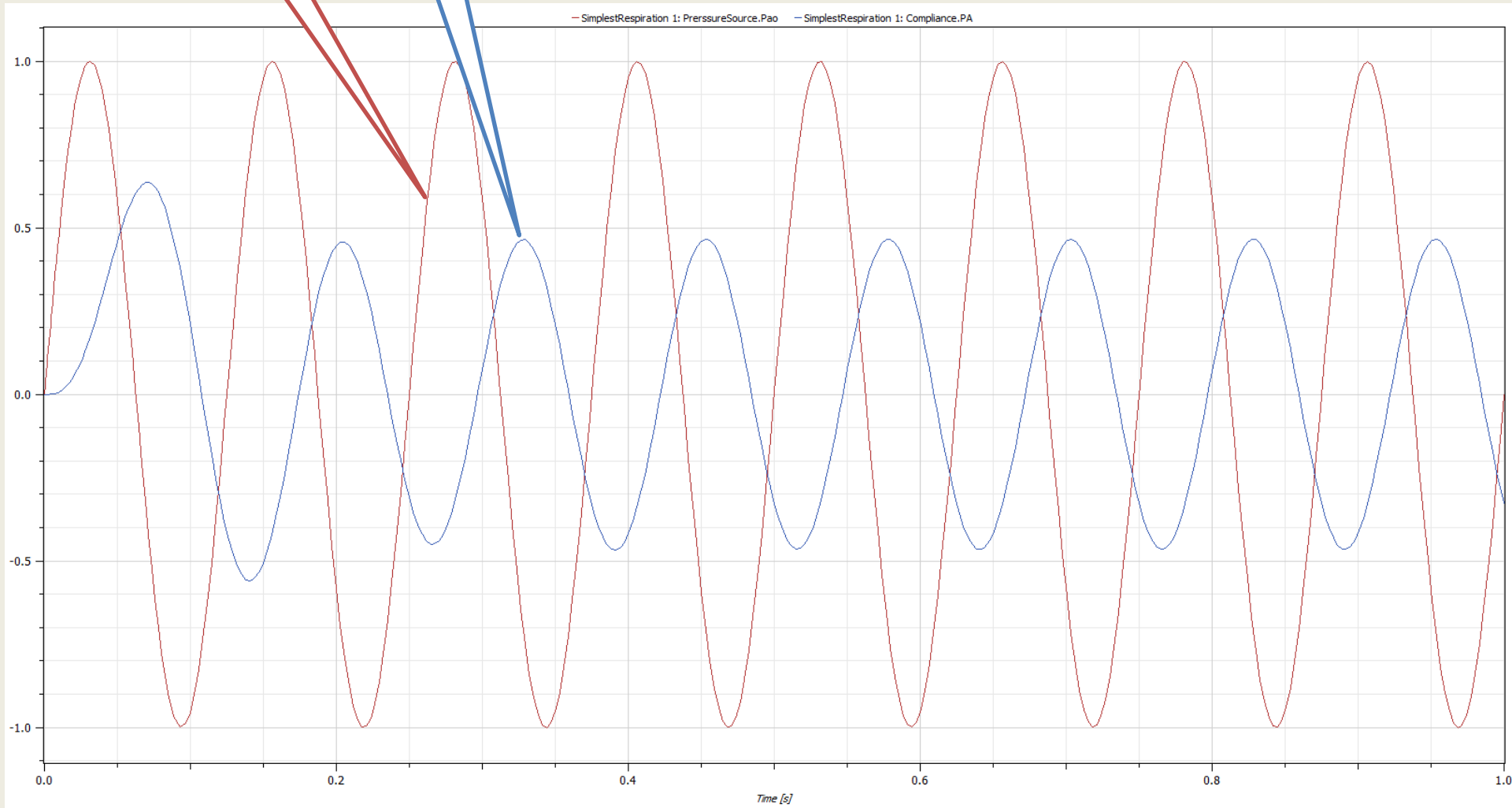
PA



# Budící vstup - 8 Hz

Pao

PA



Menu Zobrazit O programu

## 3. Dynamické charakteristiky

Úvod Zpět Další

**Parametry systému**

A0	0,2	4	0,85
A1	0,2	4	1,50
A2	0,1	2	1,00

1.řád 2.řád

**Vstupní signál**

Sinus f 0 5 0,68

**II. Rotující vektor**

64 355

**I. Odezva systému**

x (amplitude)

t (time)

**III. Nyquistův diagram**

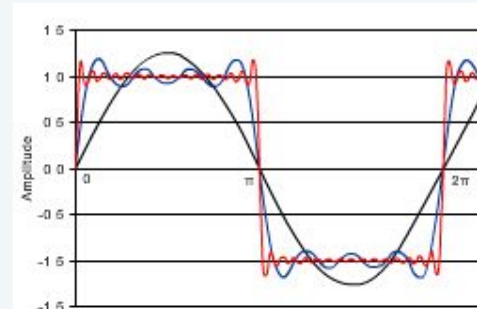
Im  pozdrž

Frekvence	Amplituda	Fázový posun
0,132158592	1,16751707	-0,233781159
0,3524229	1,11266267	-0,6294854
0,682819366	0,9133436	-1,21202052
0,726872265	0,878800869	-1,28359
0,7709251	0,8435302	-1,35282755
0,8370044	0,790147364	-1,45190859
1,05726874	0,62124455	-1,73752213
1,18942726	0,5339788	-1,87673879
1,45374453	0,39658317	-2,095274
1,60792947	0,3363891	-2,193892
1,67400885	0,314261436	-2,2310524

### 3. Dynamické charakteristiky

Téma:

Při sledování odezvy na budící signál zjišťujeme různé varianty průběhu přechodového jevu (viz např. kapitola 1. a 2.), které jsou zejména dobře patrné působí-li na vstupu funkce skoku; přechodové jevy nejsou pouze důsledkem hodnoty budící funkce, ale jsou také důsledkem rychlosti změn jejich hodnot (tj. např. skoku). Až na (zde pouze matematicky zajímavé) výjimky lze každou funkci zobrazit Fourierovou dekompozicí jako sumu sinových (nebo kosinových) funkcí různé amplitudy, frekvence a fáze - což zjednodušeně naznačuje příklad na obr.1.



Obr.1: Obrázek naznačuje Fourierovu dekompozici pravoúhlých pulzů (pro ilustraci zakreslen jen omezený počet složek)

Platí to také pro již uvedené standardně používané budící signály (skok apod.) a zjišťované přechodové jevy jsou tedy odezvou systému na tuto "směsici" vstupních signálů. Odezva systému na skok, když byl systém před tím (tj. v čase  $t < 0$ ) v klidovém stavu, je tzv. **přechodová funkce**. Její grafické znázornění je **přechodová charakteristika**, která obsahuje informaci o reakci systému na všechny složky budící funkce, které odpovídají její dekompozici; tuto informaci ale obvykle nelze plně vytěžit. Podle přechodové charakteristiky však lze poznat, zda je systém prvního nebo vyššího řádu (viz např. časové

$$x_i = A_i \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad x_a = A_a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{X}_i = A_i e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \bar{X}_a = A_a e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{\bar{X}_a}{\bar{X}_i} = F(j\omega)$$

$$T\dot{x}_2 + x_2 = x_1$$

$\bar{X}'_a(j\omega) \quad j\omega\bar{X}_a(j\omega) \quad \bar{X}_i(j\omega)$

$$\bar{X}'_a(j\omega) = j\omega A_a e^{j\omega t} = j\omega\bar{X}_a(j\omega)$$

$$Tj\omega\bar{X}_a(j\omega) + \bar{X}_a(j\omega) = \bar{X}_i(j\omega)$$

$$(Tj\omega + 1)\bar{X}_a(j\omega) = \bar{X}_i(j\omega)$$

$$F(j\omega) = \frac{\bar{X}_a(j\omega)}{\bar{X}_i(j\omega)} = \frac{1}{1+Tj\omega}$$

$$T\dot{x}_2 + x_2 = x_1$$

$$F(j\omega) = \frac{\overline{X_a}(j\omega)}{\overline{X_i}(j\omega)} = \frac{1}{1+Tj\omega}$$

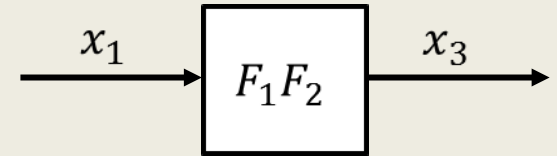
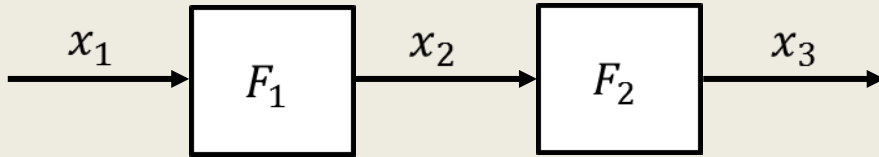
$$T_2^2 \ddot{x}_2 + T_1 \dot{x}_2 + x_2 = x_1$$

$$F(j\omega) = \frac{\overline{X_a}(j\omega)}{\overline{X_i}(j\omega)} = \frac{1}{1+T_1j\omega+T_2^2(j\omega)^2}$$

$$j\omega = s$$

$$F(s) = \frac{\overline{X_a}(s)}{\overline{X_i}(s)} = \frac{1}{1+T_1s+T_2^2(s)^2}$$

$$F(s) = \frac{\overline{X_3}(s)}{\overline{X_1}(s)}$$



$$F_1(s) = \frac{\overline{X_2}(s)}{\overline{X_1}(s)} \quad F_2(s) = \frac{\overline{X_3}(s)}{\overline{X_2}(s)}$$

$$\overline{X_2}(s) = F_1(s) \overline{X_1}(s) \quad \overline{X_3}(s) = F_2(s) \overline{X_2}(s)$$

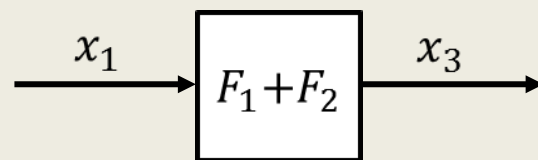
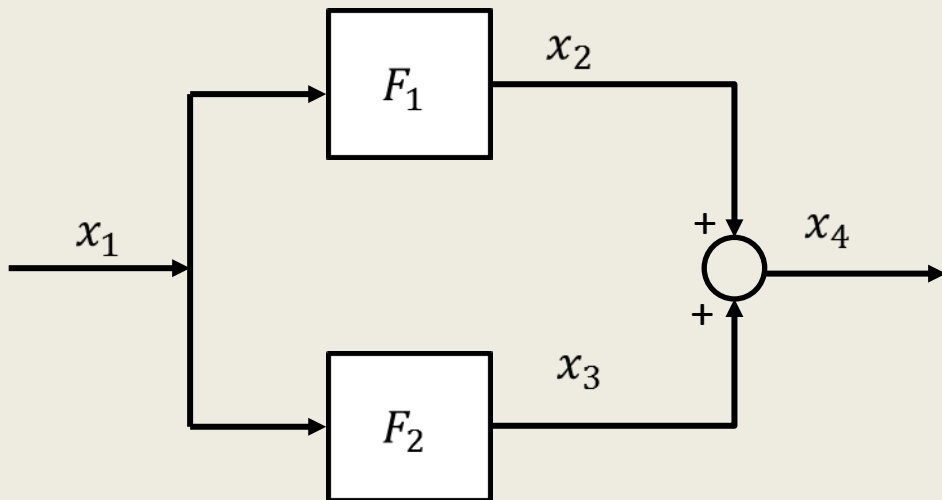
$$\overline{X_3}(s) = F_2(s) F_1(s) \overline{X_1}(s)$$

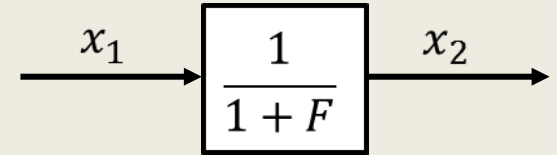
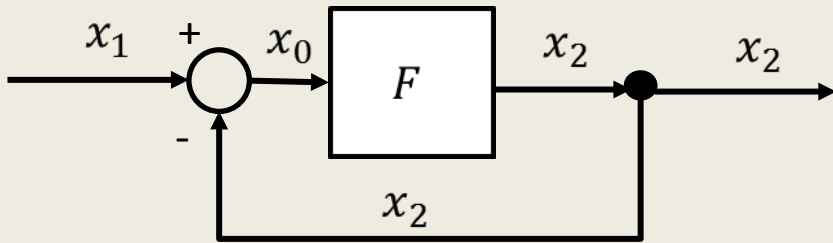
$$\overline{X_3}(s) = F_2(s) F_1(s) \overline{X_1}(s)$$

$$F(s) = \frac{\overline{X_3}(s)}{\overline{X_1}(s)} = \frac{F_2(s) F_1(s) \overline{X_1}(s)}{\overline{X_1}(s)} = F_2(s) \cdot F_1(s)$$



$$F(s) = \frac{\overline{X_4}(s)}{\overline{X_1}(s)} = F_1(s) + F_2(s)$$



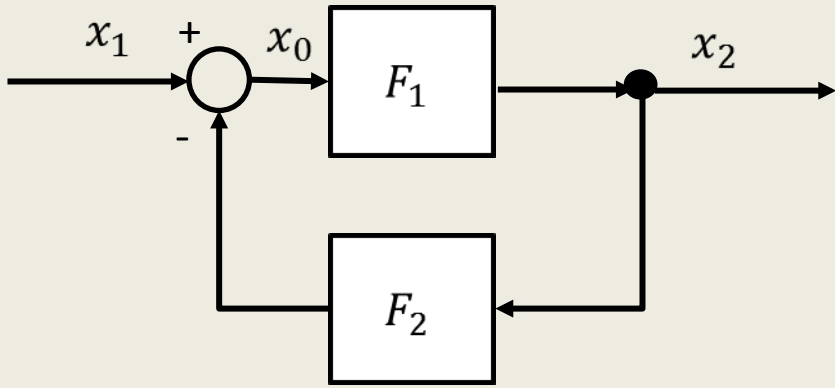


$$\bar{X}_2(s) = F(s) \cdot \bar{X}_0(s)$$

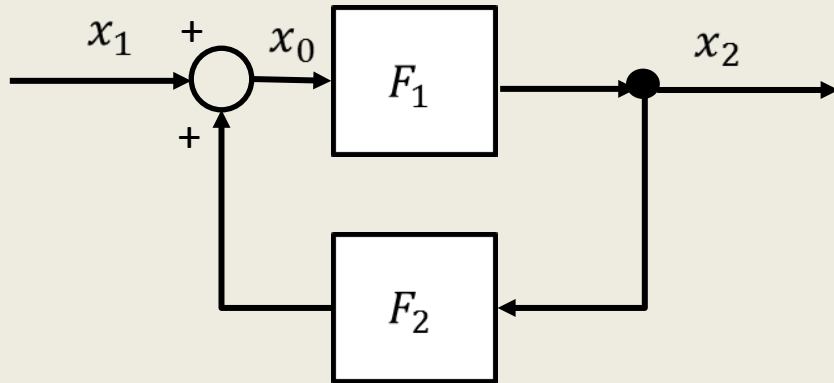
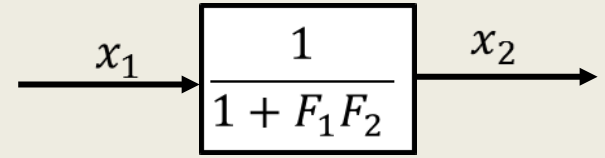
$$\bar{X}_0(s) = \bar{X}_1(s) - \bar{X}_2(s)$$

$$\bar{X}_2(s) = F(s) \cdot (\bar{X}_1(s) - \bar{X}_2(s))$$

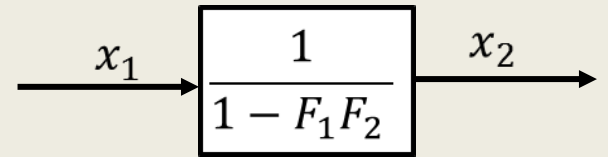
$$F(s) = \frac{\bar{X}_2(s)}{\bar{X}_1(s)} = \frac{F(s)}{1 + F(s)}$$

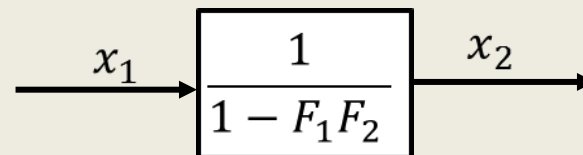
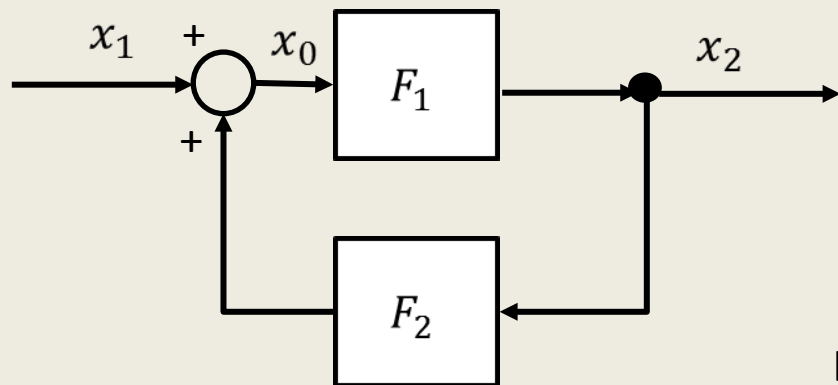
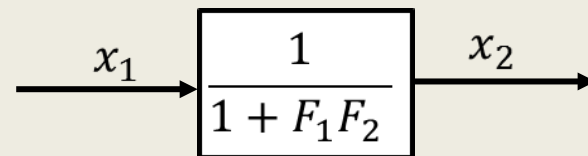
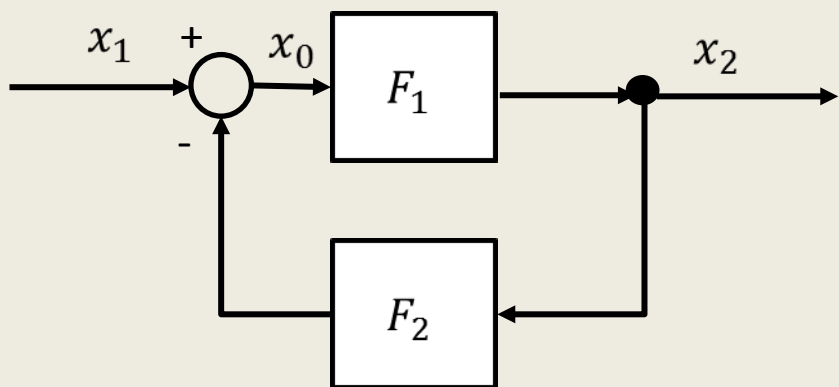
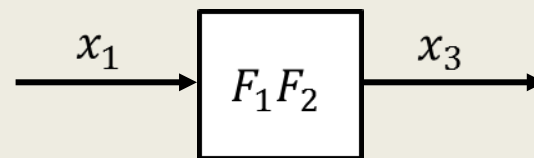
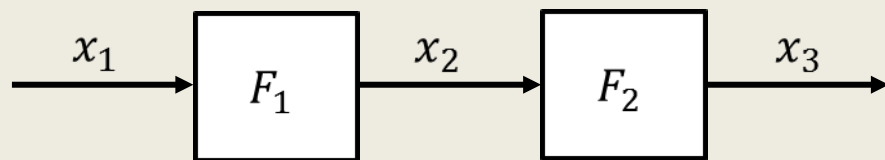
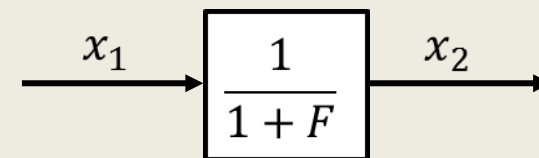
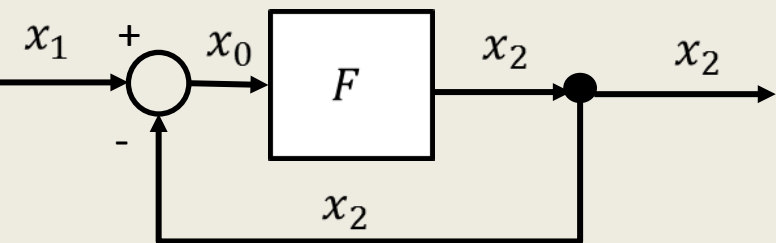


$$F(s) = \frac{\overline{X_2}(s)}{\overline{X_1}(s)} = \frac{1}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$



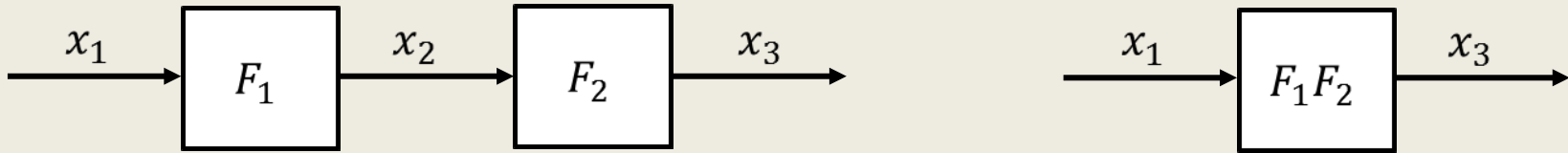
$$F(s) = \frac{\overline{X_2}(s)}{\overline{X_1}(s)} = \frac{1}{1 - F_1(s)F_2(s)}$$





Logaritmičké vyjádření usnadní násobení

## Logaritmické vyjádření usnadní násobení

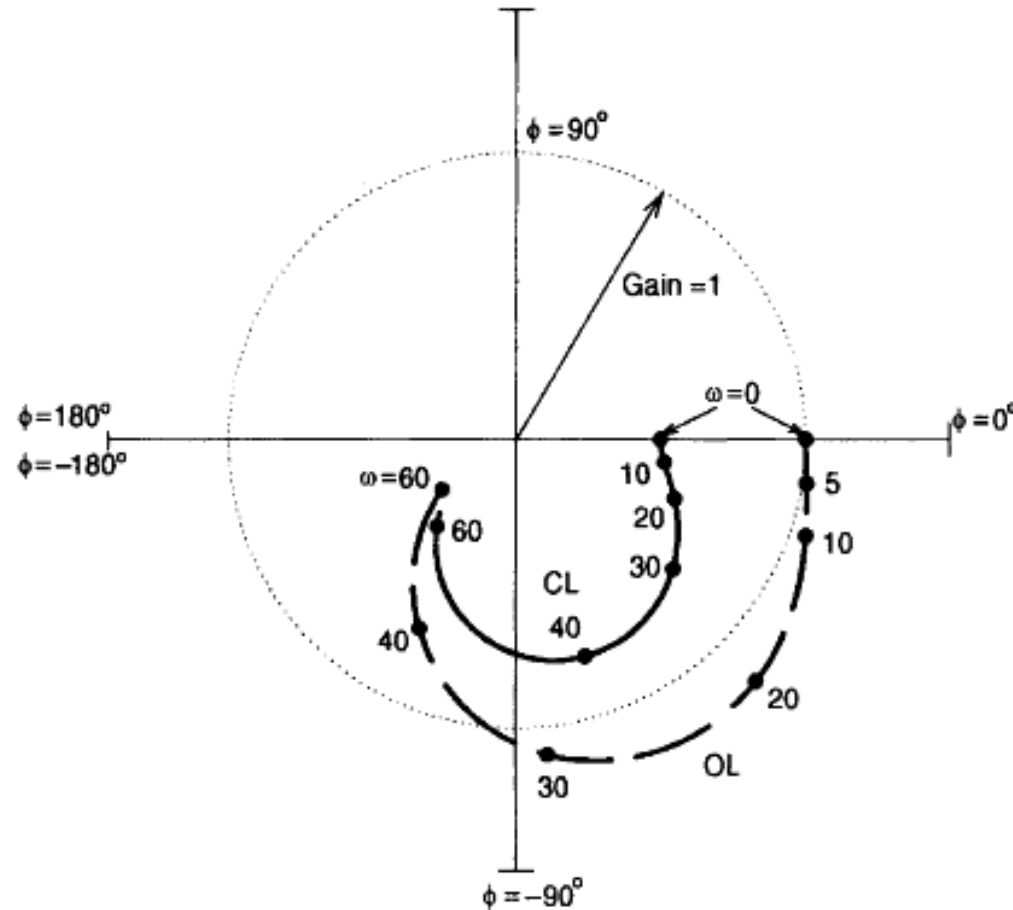


$$F(j\omega) = F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = |F_1(j\omega)|e^{j\varphi_1(\omega)} * |F_2(j\omega)|e^{j\varphi_2(\omega)}$$

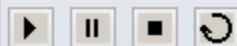
Pro přenos pak platí:  $\log F(j\omega) = \log|F_1(j\omega)| + \log|F_2(j\omega)|$

a:  $\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega)$

# Nyquistovy diagramy



Viz též <http://physiome.cz/atlas/sim/RegulaceSys/>



# 5. Regulační obvod

Úvod

Zpět

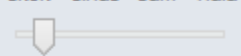
Další

5.1 Regulace

5.2 Regulace

### Vstupní signál

skok  sinus  šum  nula



Amplituda = 1

### Soustava

1.řád  2.řád

A1	0,1	2	1,37
A2	0,1	2	0,90

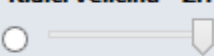
### Zpětná vazba - ZV

P	0,1	15	9,0
I <input checked="" type="checkbox"/>	0,1	30	17,0
D <input checked="" type="checkbox"/>	0,1	1	0,5

Zařazení dynamického prvku do ZV

A1	0,1	2	1,00
----	-----	---	------

### Řídící veličina - ŽH

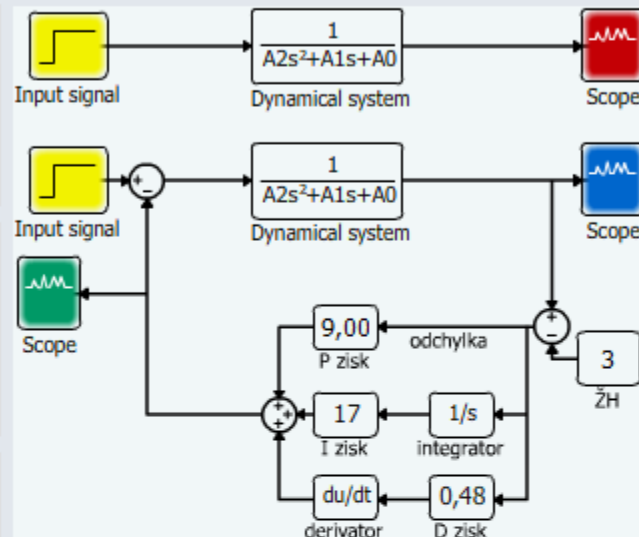


funkce skok

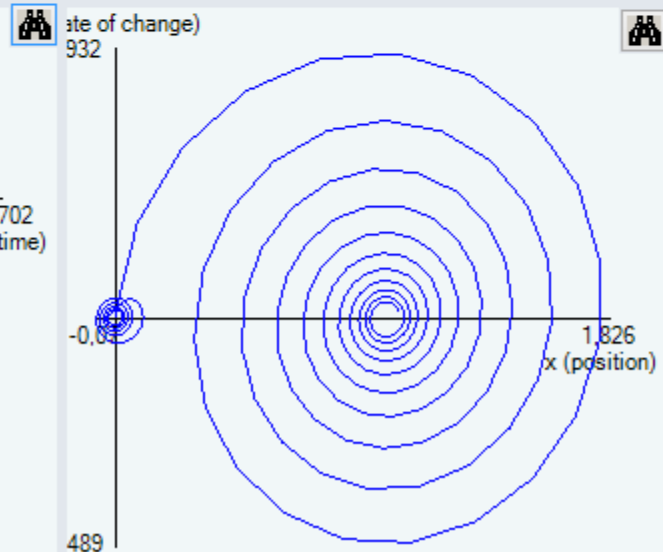
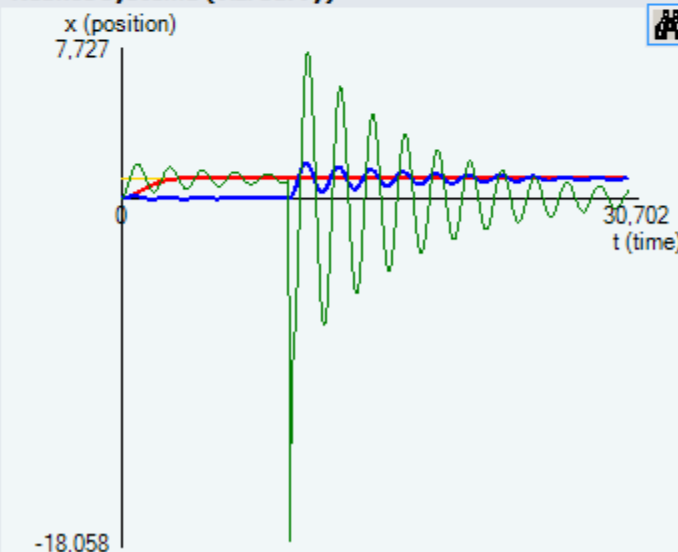
funkce rampa

### Rozpojení ZV

OFF

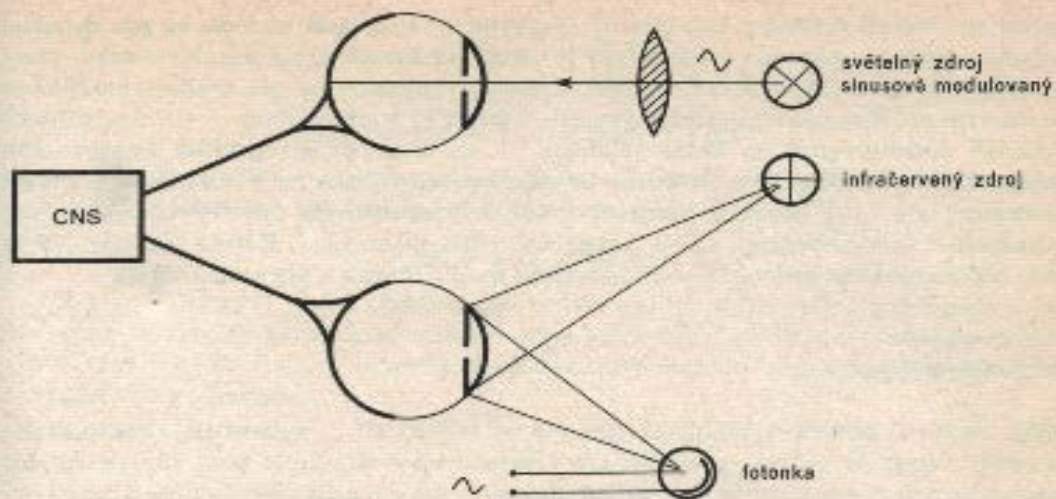


### Reakce systému (viz. barvy)

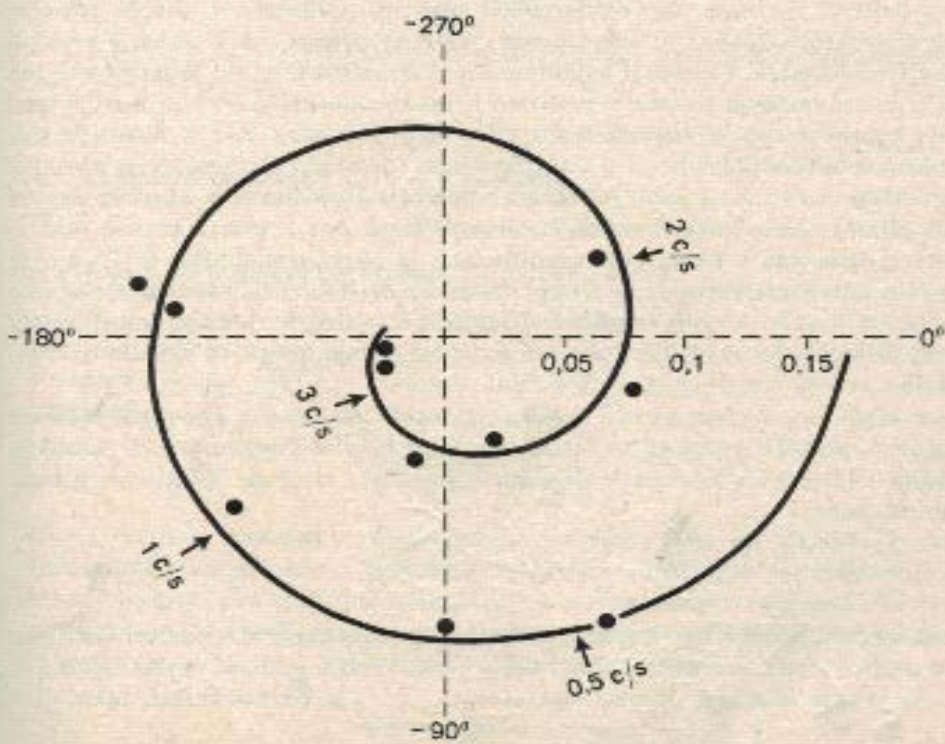


Viz též <http://physiome.cz/atlas/sim/RegulaceSys/>

## Frekvenční charakteristika biologického systému:



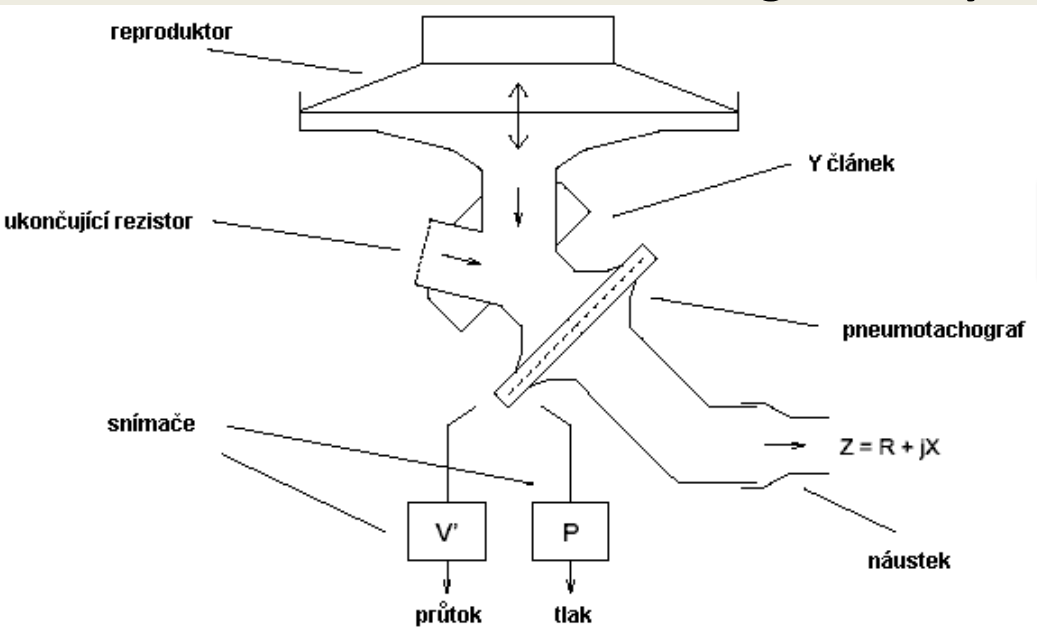
Obr. 75. Příklad uspořádání experimentu při stanovení frekvenční charakteristiky biologického systému.



Obr. 76.



# Frekvenční charakteristika biologického systému: Impulsní oscilometrie

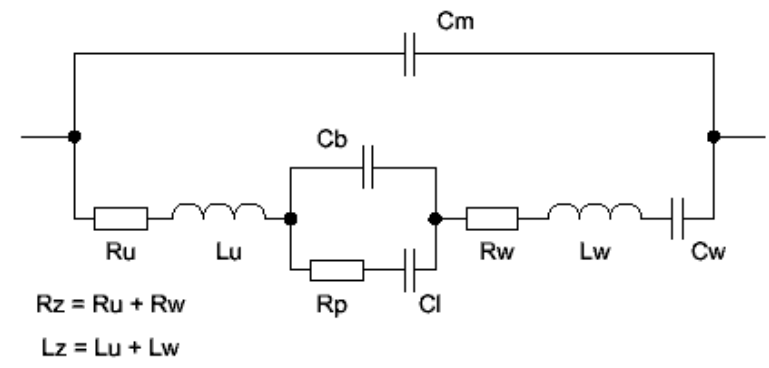


Klinické vyhodnocení RLC parametrů dýchacího systému

## Impulse Oscillometry Testing

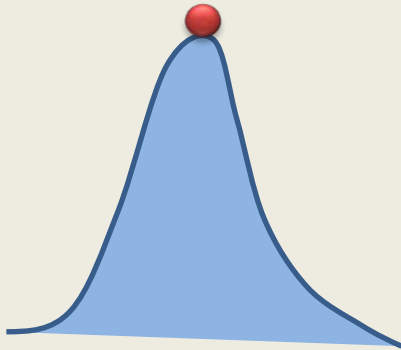
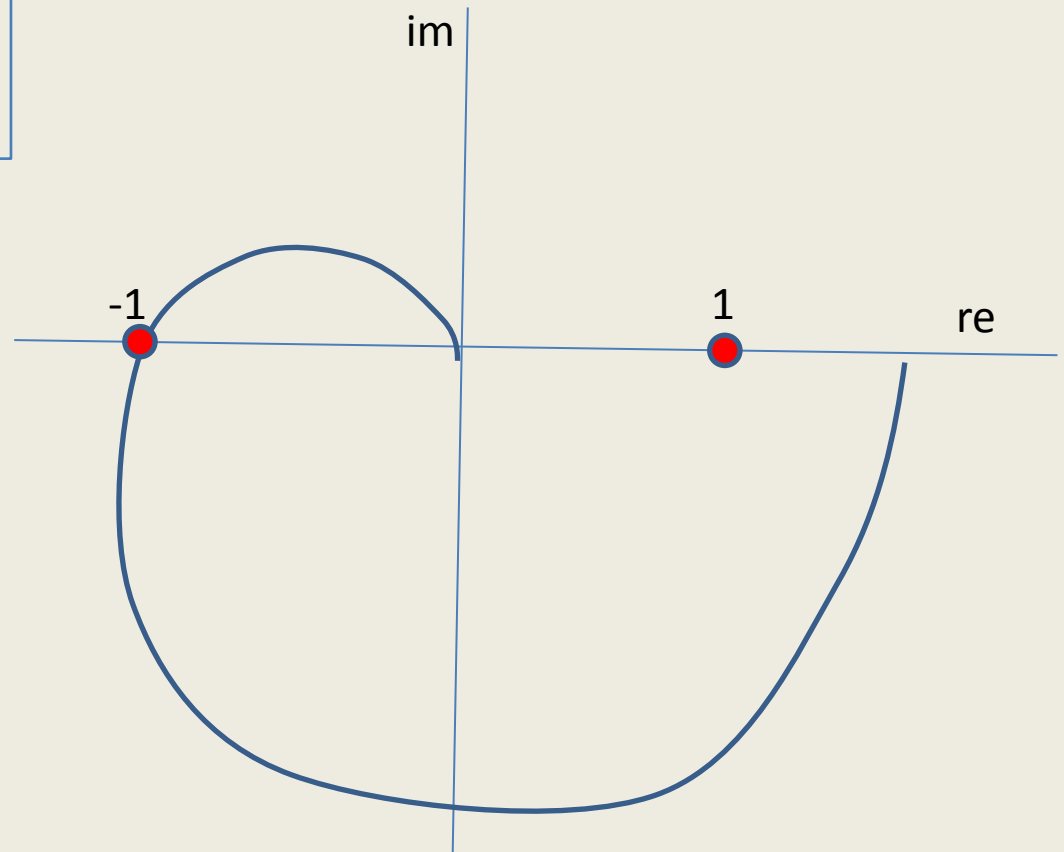
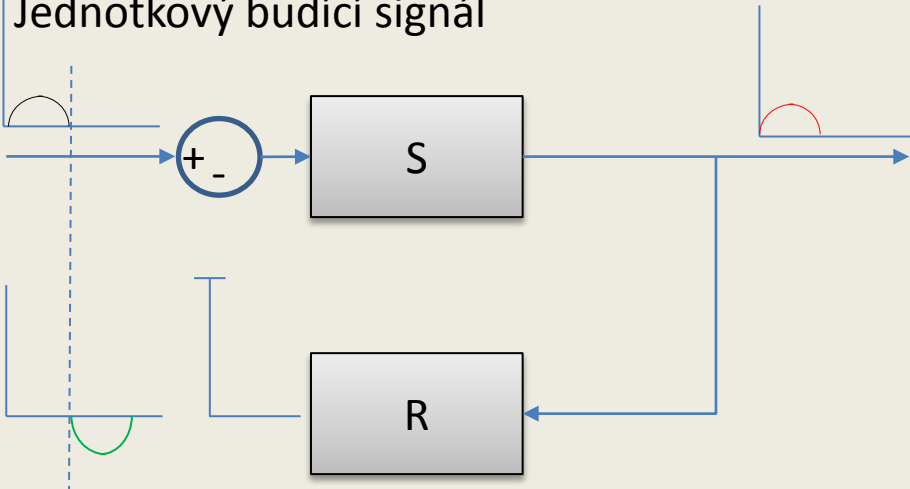


- $R_z$  centrální resistance
- $R_p$  periferní resistance
- $C_1$  poddajnost plic
- $C_w$  poddajnost hrudní stěny
- $C_b$  bronchiální poddajnost
- $L_z$  centrální inertance
- $C_m$  oropharyngeální poddajnost



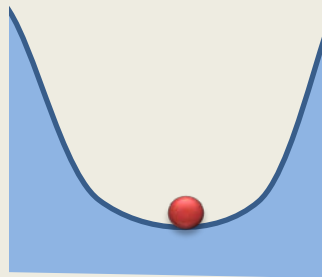
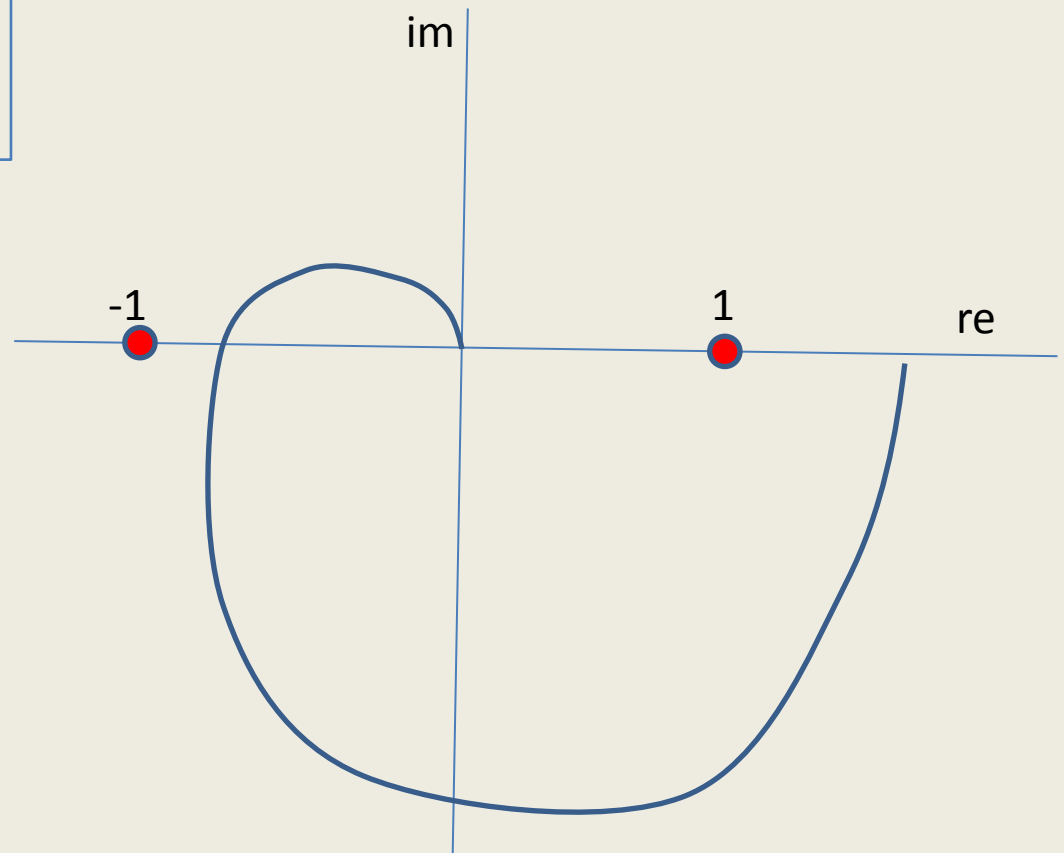
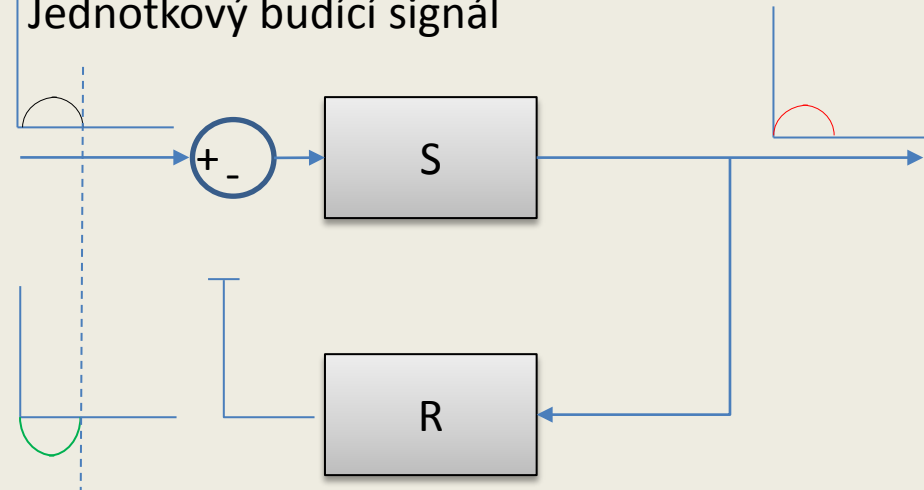
# Niquistovo kritérium stability

Jednotkový budící signál



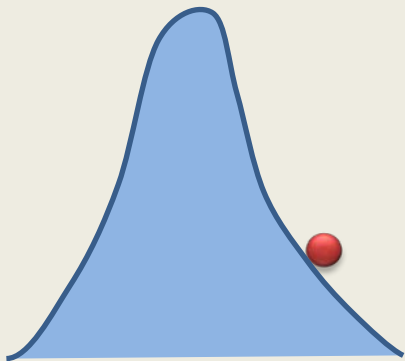
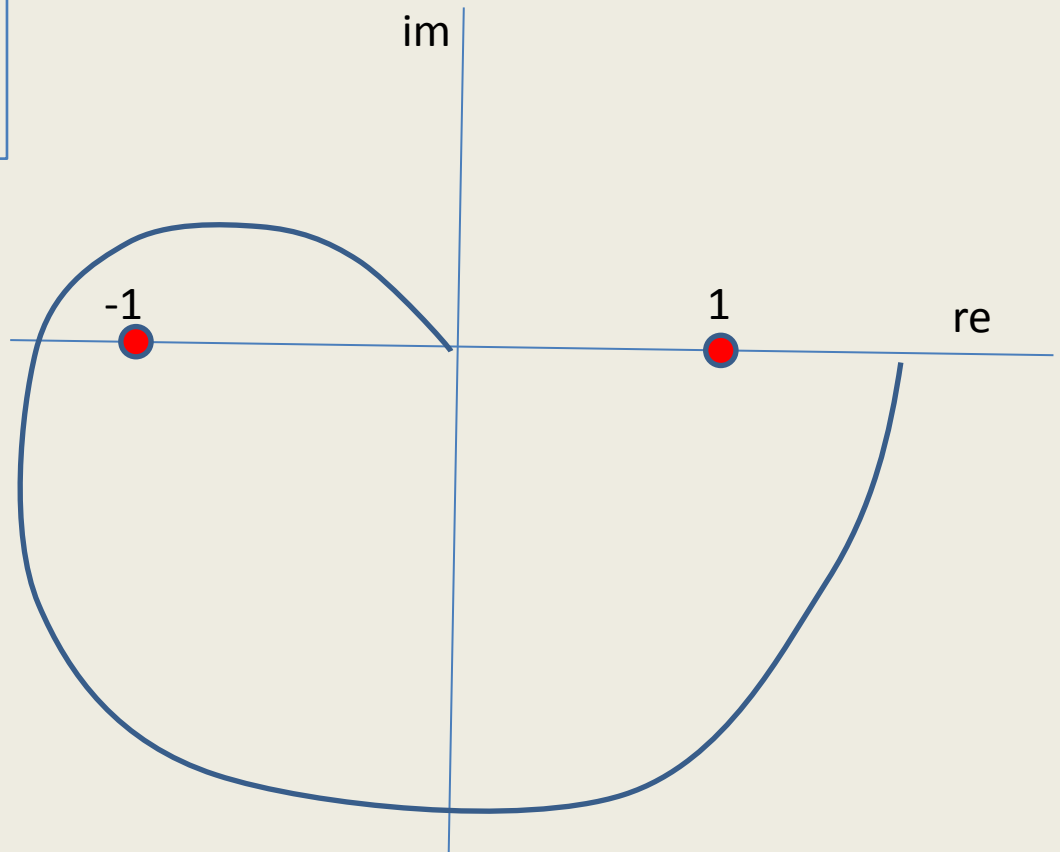
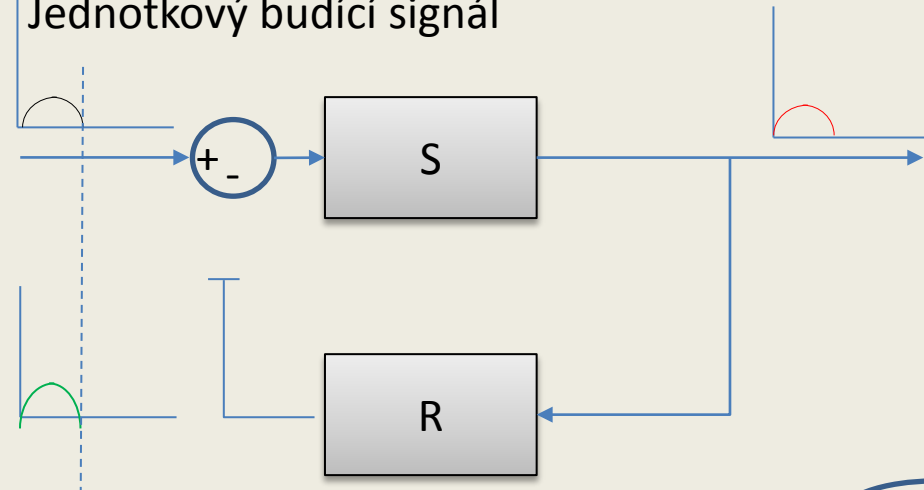
# Niquistovo kritérium stability

Jednotkový budící signál



# Niquistovo kritérium stability

Jednotkový budící signál



## Bodeovy diagramy

$$F(j\omega) = \frac{\bar{X}_2(j\omega)}{\bar{X}_1(j\omega)} = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

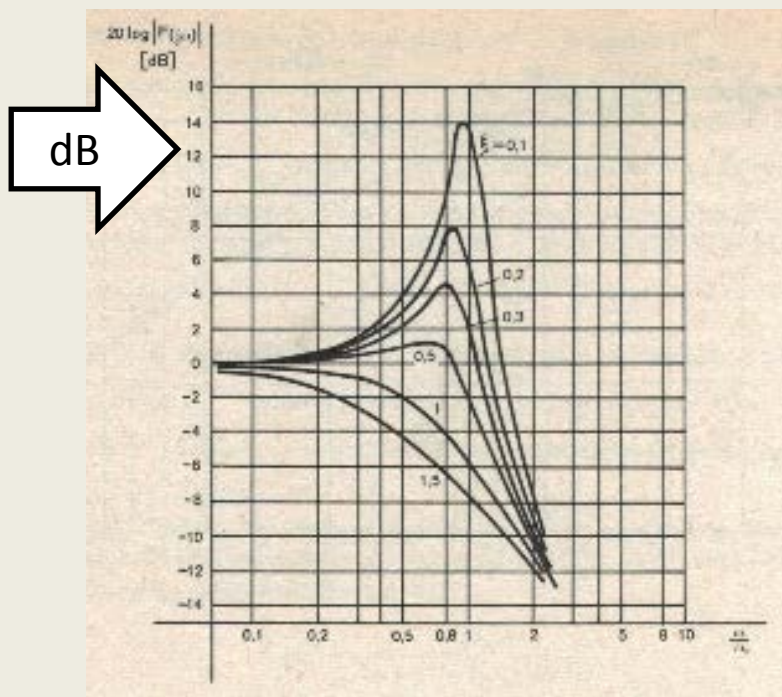
$$\ln F(j\omega) = \ln|F(j\omega)| + j\varphi(\omega)$$

poměr amplitud:  $|F(j\omega)|$

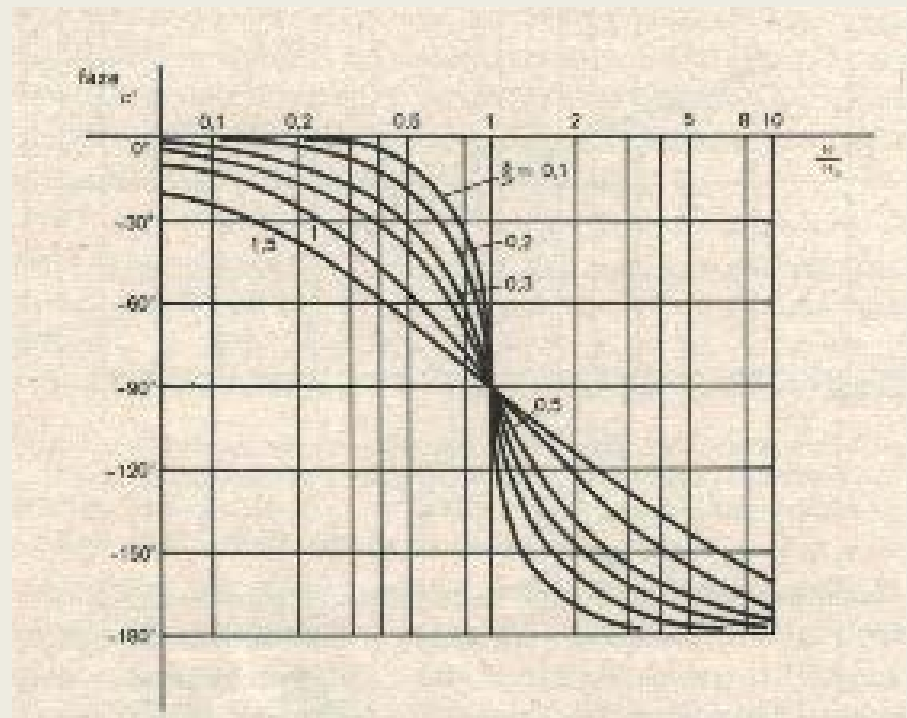
fáze přenosu:  $\varphi(\omega)$

Amplitudové hodnoty jsou vyjádřeny v decibelech, což je dekadický logaritmus vstupního a výstupního signálu

násobený dvaceti:  $|F(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10}|F(j\omega)|$



Amplitudová logaritmická frekvenční charakteristika



Fázová logaritmická frekvenční charakteristika

Přenos členu prvního řádu:

$$F(j\omega) = \frac{K_0}{1+Tj\omega}$$

Amplitudová charakteristika:

$$|F(j\omega)|_{db} = 20 \log K_0 - 20 \log|1 + Tj\omega|$$

konstanta

$$-20 \log|1 + Tj\omega| = -20 \log\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

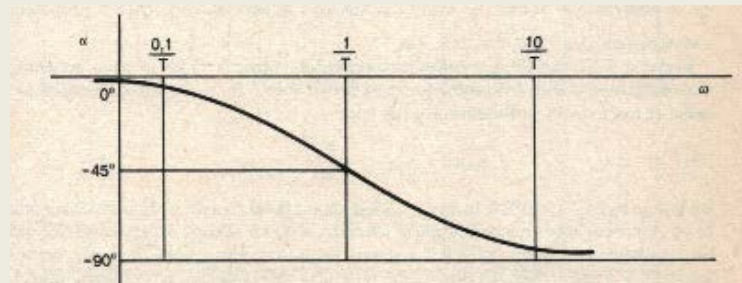
Když:  $\omega \ll \frac{1}{T}$

$$\omega^2 T^2 \approx 0$$

$$20 \log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 20 \log 1 = 0$$

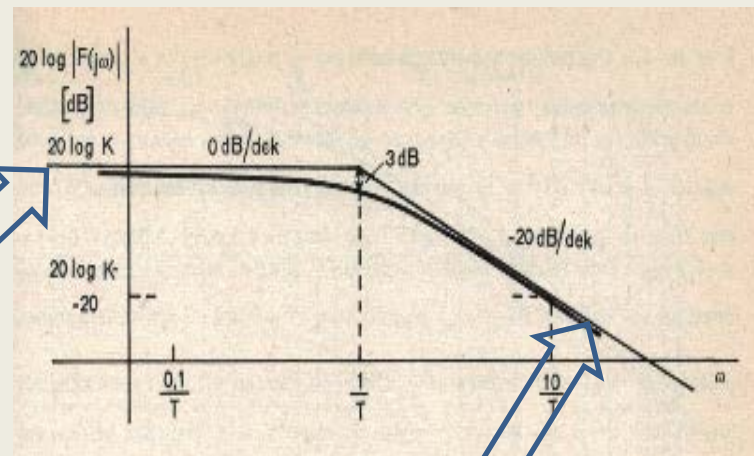
Když:  $\omega = \frac{1}{T}$   $20 \log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} = 20 \log 1 = 0$

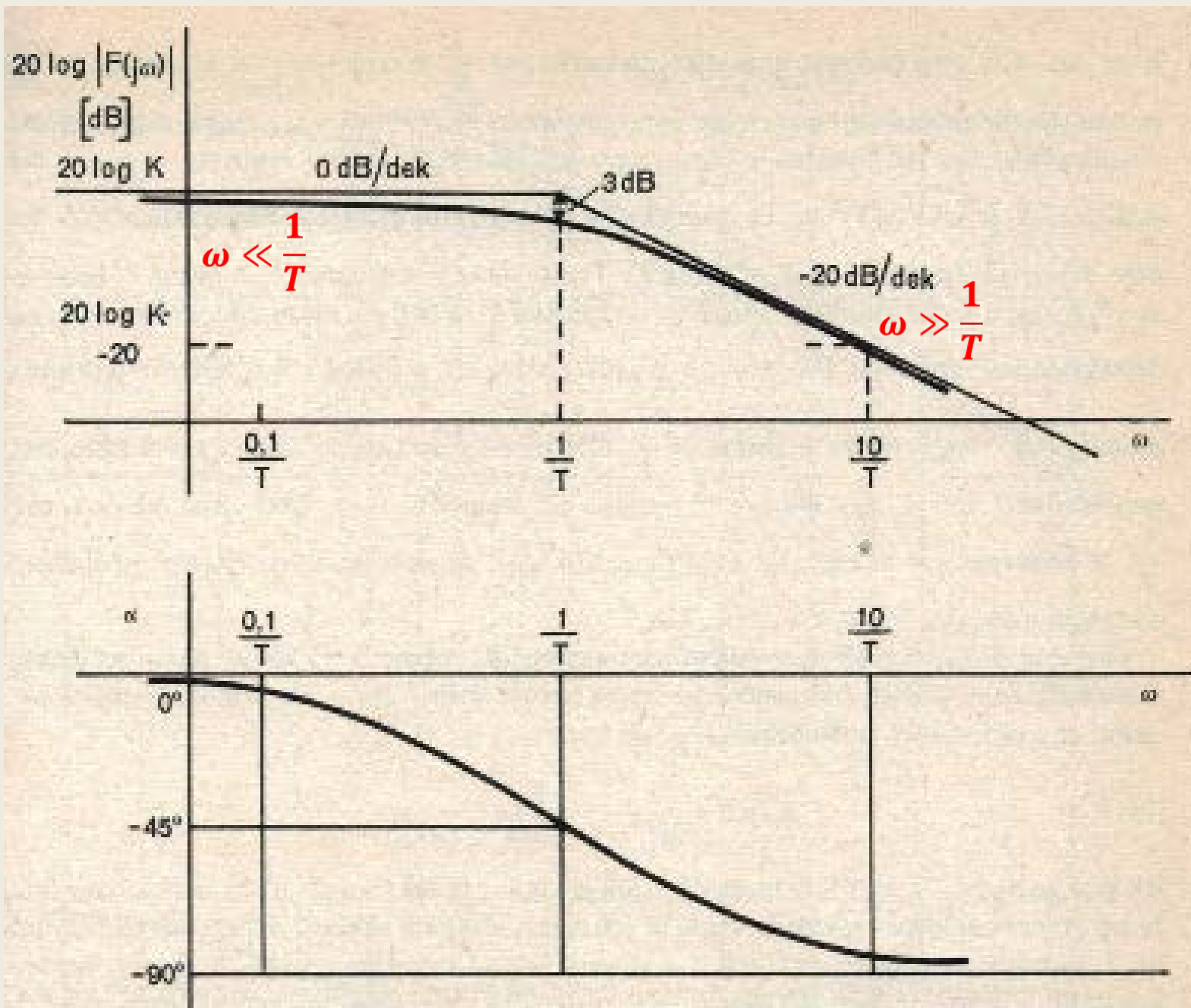
Když:  $\omega \gg \frac{1}{T}$   $20 \log\sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 20 \log\sqrt{\omega^2 T^2} = 20 \log \omega T = 20 \log \omega + 20 \log T$



Fázová charakteristika:

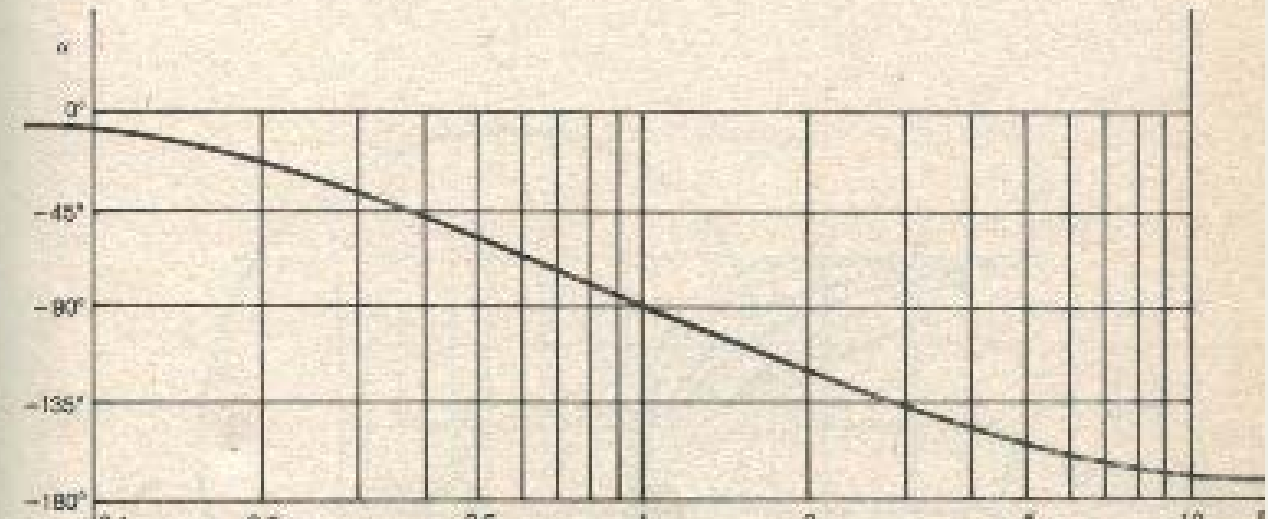
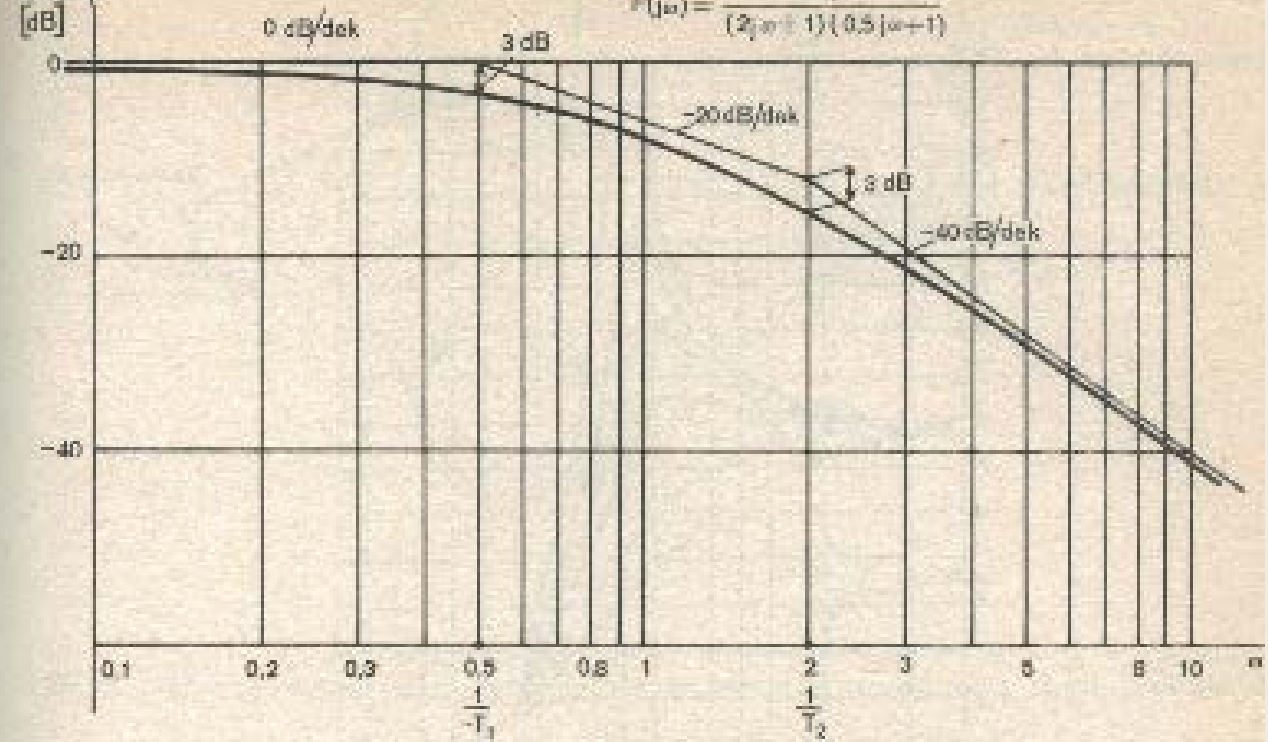
$$\varphi(\omega) = \arctg \omega T$$





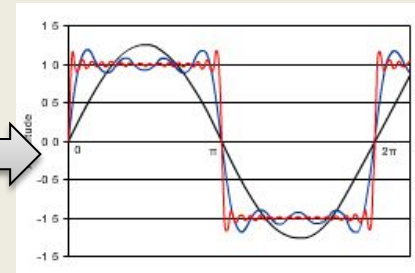
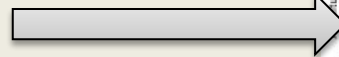
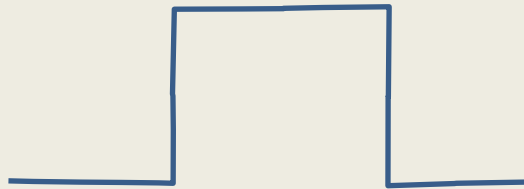
Přenos členu druhého řádu:

$$F(j\omega) = \frac{1}{(2j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$





# Kmitočtový přenos



Z Eulerova vztahu:

Vstupní funkce:  $u(t) = u_0 \sin(\omega t)$

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}$$

Výstup po ustálení:  $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$

$$y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

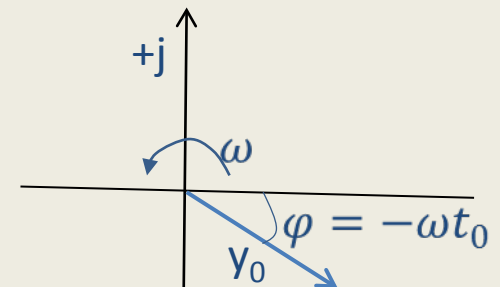
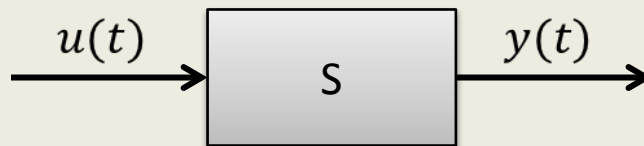
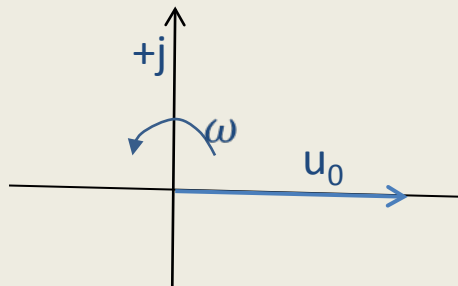
$$\varphi = \omega t_0$$

Kmitočtový přenos:

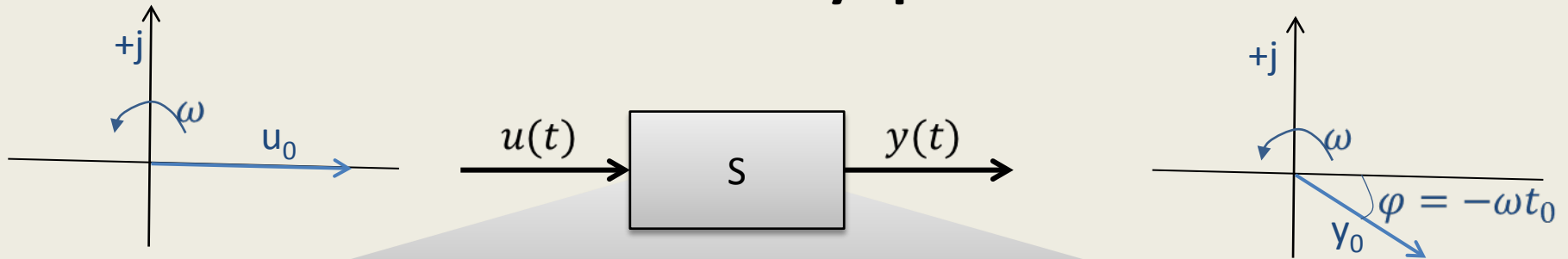
$$H(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{y_0}{u_0} e^{j\varphi}$$

modul:  $\frac{y_0}{u_0}$

argument:  $\varphi$



# Kmitočtový přenos



$$a_n y^n(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^m(t) + \dots + b_0 u(t)$$

$$y(t) = y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$y'(t) = j\omega y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$y''(t) = j\omega^2 y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\dots$$

$$y^{(n)}(t) = j\omega^n y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$u(t) = u_0 e^{j\omega t}$$

$$u'(t) = j\omega u_0 e^{j\omega t}$$

$$u''(t) = (j\omega)^2 u_0 e^{j\omega t}$$

...

$$u^{(m)}(t) = (j\omega)^m u_0 e^{j\omega t}$$

$$y_0 e^{j(\omega t + \varphi)} [a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0] = u_0 e^{j\omega t} [b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0]$$

Kmitočtový přenos:

$$H(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0 e^{j(\omega t + \varphi)}}{u_0 e^{j\omega t}} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_1 j\omega + a_0}$$

# Kmitočtový přenos

Kmitočtový přenos je také:

podíl Fourierova obrazu výstupní veličiny systému a Fourierova obrazu vstupní veličiny (při nulových počátečních podmínkách systému a vstupního signálu)

Aby funkce měla Fourierův obraz, musí být absolutně integrovatelná, tj.:

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}} \quad \int_0^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Obrazový přenos v Laplaceově transformaci:  $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m(s)^m + \dots + b_1s + b_0}{a_n(s)^n + \dots + a_1s + a_0}$

Kmitočtový přenos systému získáme z Laplaceovy transformace formální záměnou proměnných  $s \rightarrow j\omega$ :

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{b_m(j\omega)^m + \dots + b_1j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + \dots + a_1j\omega + a_0}$$

Takže, když např. máme k dispozici kmitočtovou funkci, můžeme její Laplaceovou transformací získat kmitočtový přenos:

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

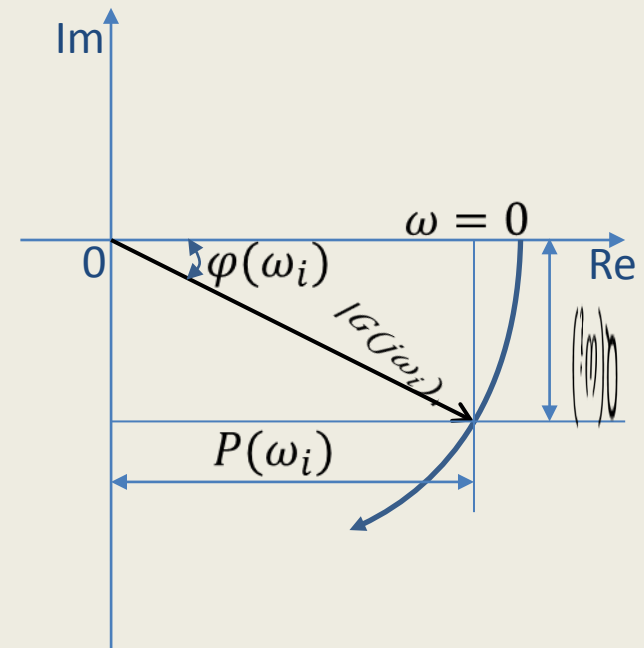
# Amplitudo-fázová kmitočtová charakteristika ve fázové rovině

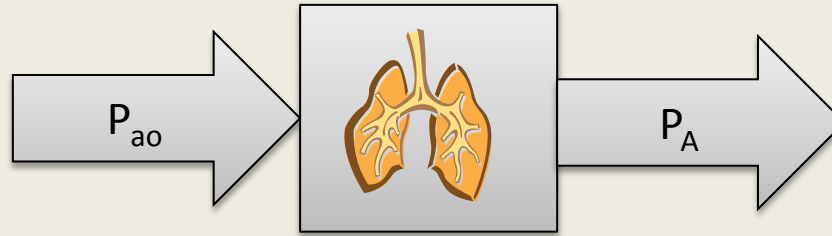
$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega) + j \operatorname{Im} G(j\omega)$$

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = |G(j\omega)| + j \operatorname{Im} G(j\omega)$$

$$A(\omega) = \operatorname{mod} G(j\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arg} G(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



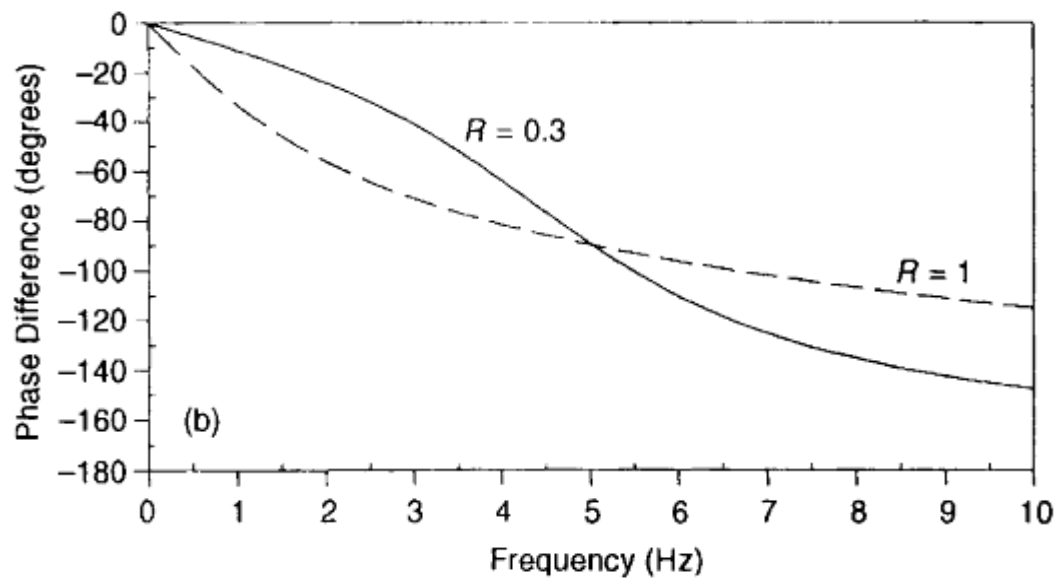
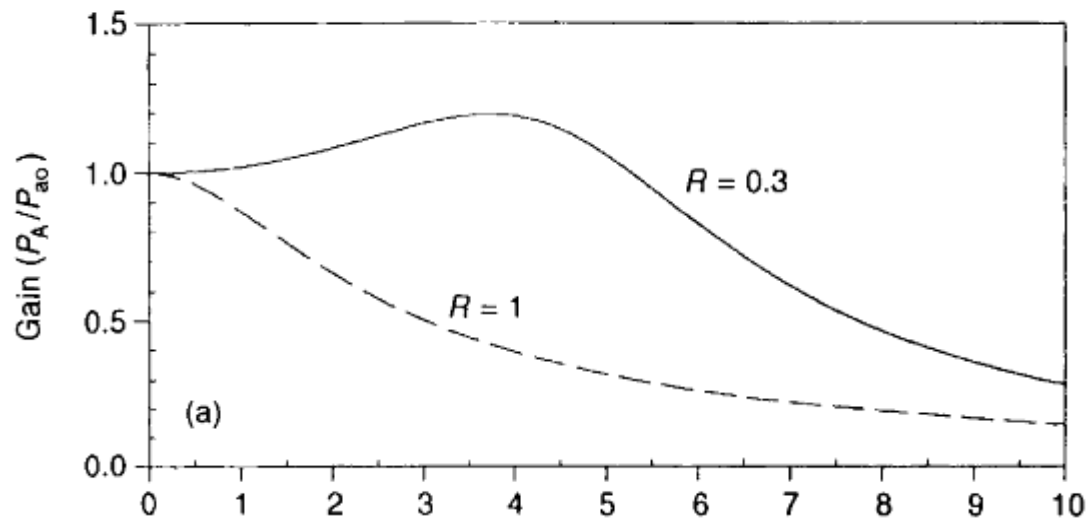


$$P_{ao} = LC \frac{d^2 P_A}{dt^2} + RC \frac{dP_A}{dt} + P_A$$

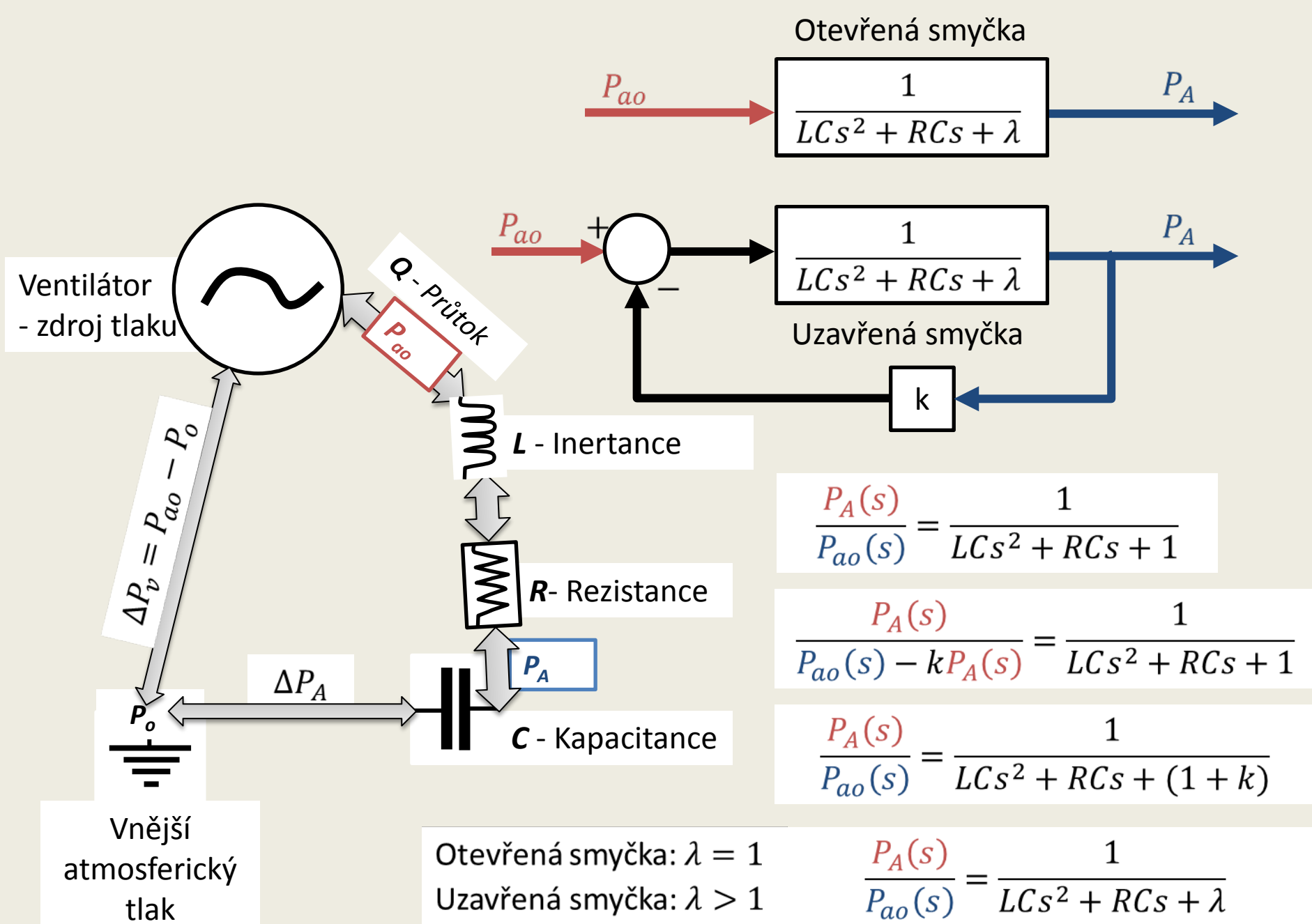
$$H(s) = \frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

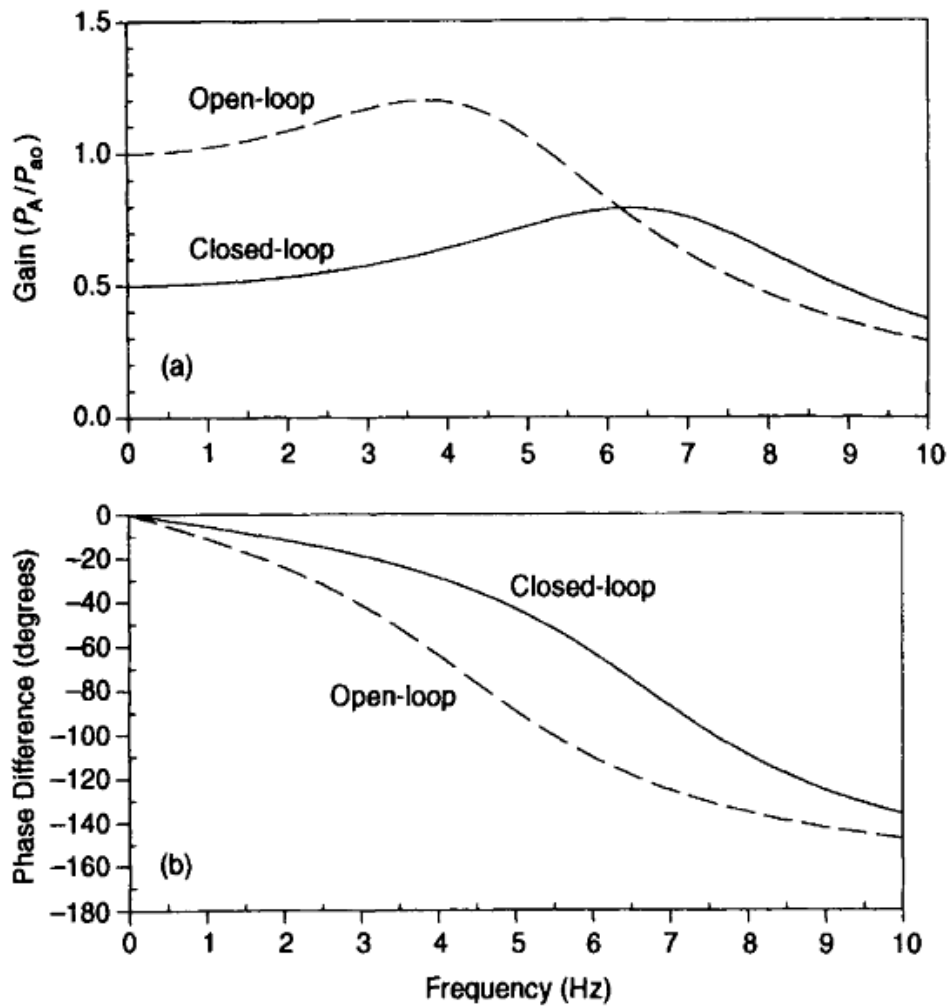
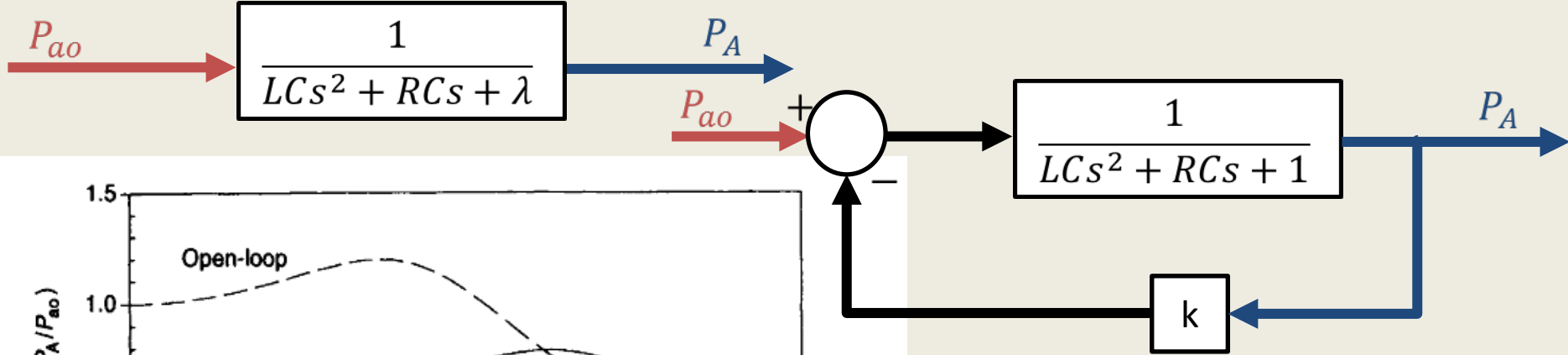
$$H(\omega) = \frac{\text{Výstup}}{\text{Vstup}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}$$

$$H(\omega) = \frac{V_{\text{ystup}}}{V_{\text{stup}}} = \frac{P_A(t)}{P_{ao}(t)} = \frac{1}{LC(j\omega)^2 + RCj\omega + 1}$$



# Nejjednodušší model mechaniky dýchání





**Figure 5.3** Frequency responses of the linearized lung mechanics model in closed-loop (solid curves) and open-loop modes. The values of the parameters used are:  $R = 0.3 \text{ cm H}_2\text{O L}^{-1}$ ,  $C = 0.1 \text{ L cm H}_2\text{O}^{-1}$ ,  $L = 0.01 \text{ cm H}_2\text{O s}^2 \text{ L}^{-1}$ , and  $k = 1$  (or equivalently,  $\lambda = 2$ ).



# Kmitočtové charakteristiky v logaritmických souřadnicích

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

$$\ln H(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega) = \ln|H(j\omega)| + j \arg H(j\omega)$$

Logaritmická amplitudová charakteristika:  $\ln|H(j\omega)|$

Logaritmická fázová charakteristika:  $\varphi(\omega) = f(\omega)$

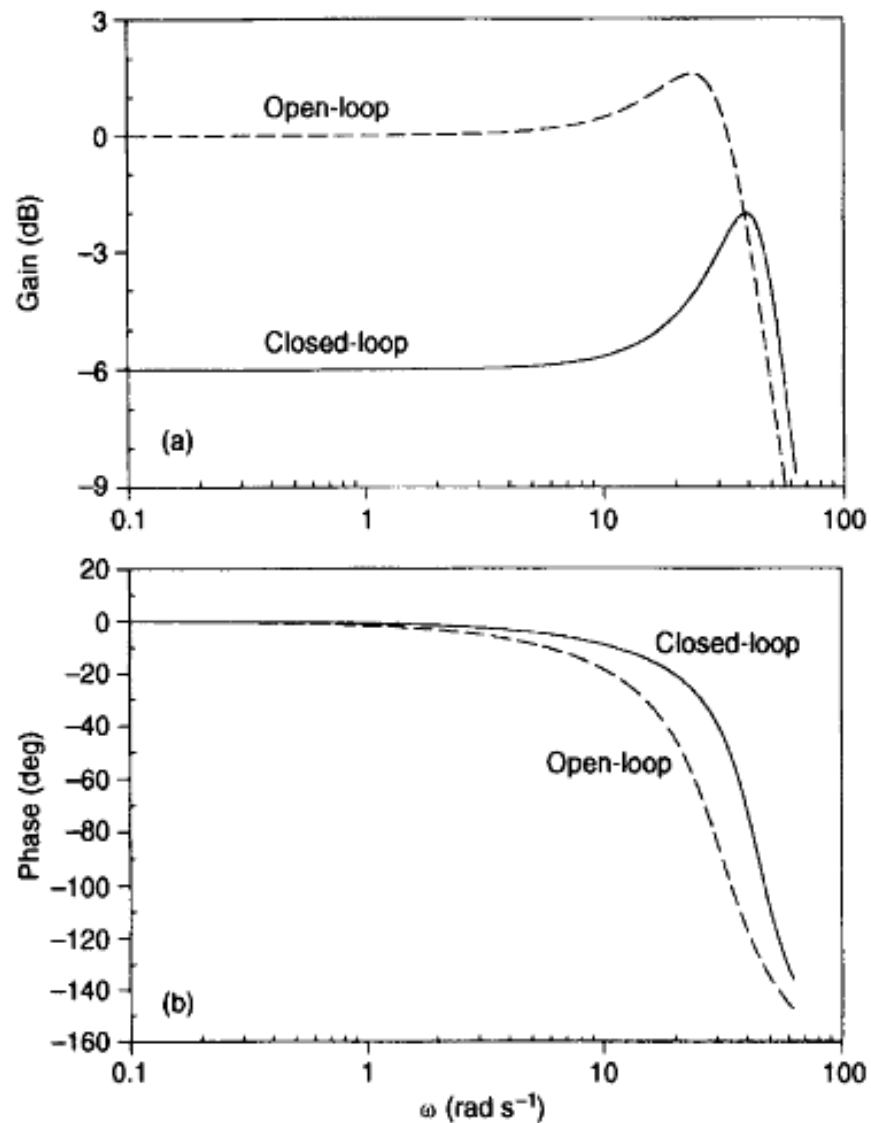
(osa kmitočtu má logaritmické měřítko)

Ve skutečnosti se užívá dekadický logaritmus pro osu úhlového kmitočtu  $\omega$ , tj.  
 $\log_{10}\omega$

A na osu pořadnic amplitudové charakteristiky se vynášší absolutní hodnota kmitočtového přenosu v decibelech:

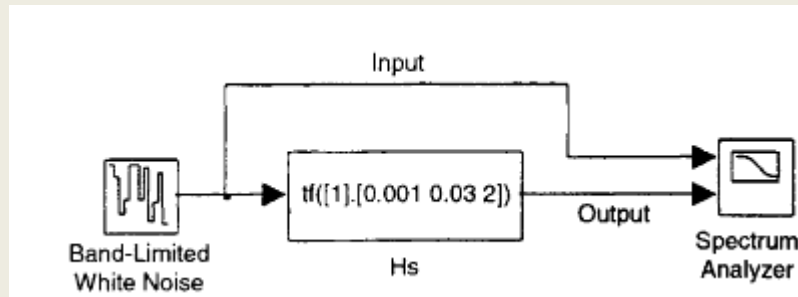
$$A[dB] = |H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

Výhoda: násobení přenosů v logaritmických souřadnicích přechází na sčítání.

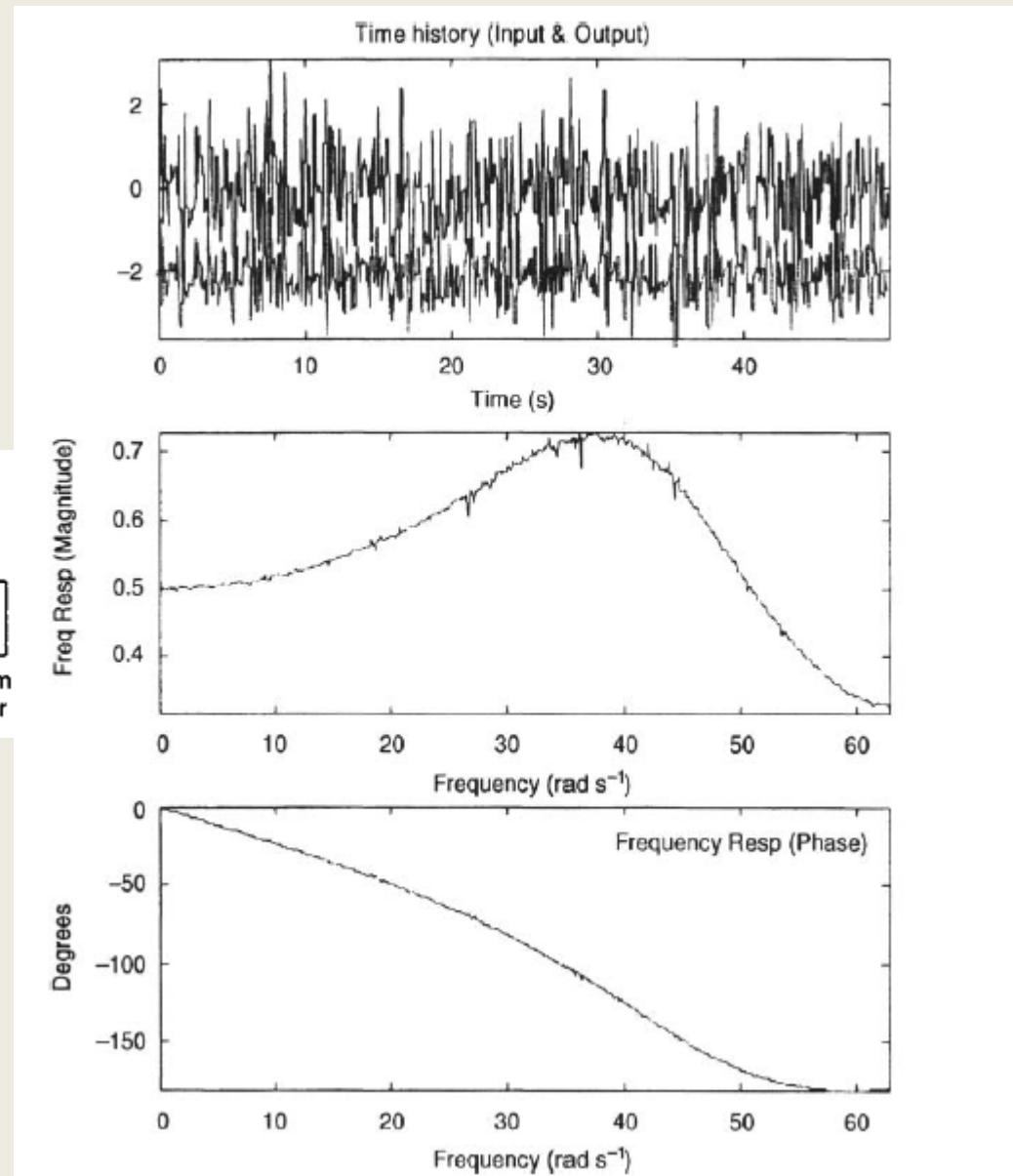


**Figure 5.6** Bode plots of the frequency response of the linearized lung mechanics model in open-loop and closed-loop modes.

# Frekvenční analýza modelů fyziologických systémů



Simulink



# Frekvenční analýza modelů fyziologických systémů

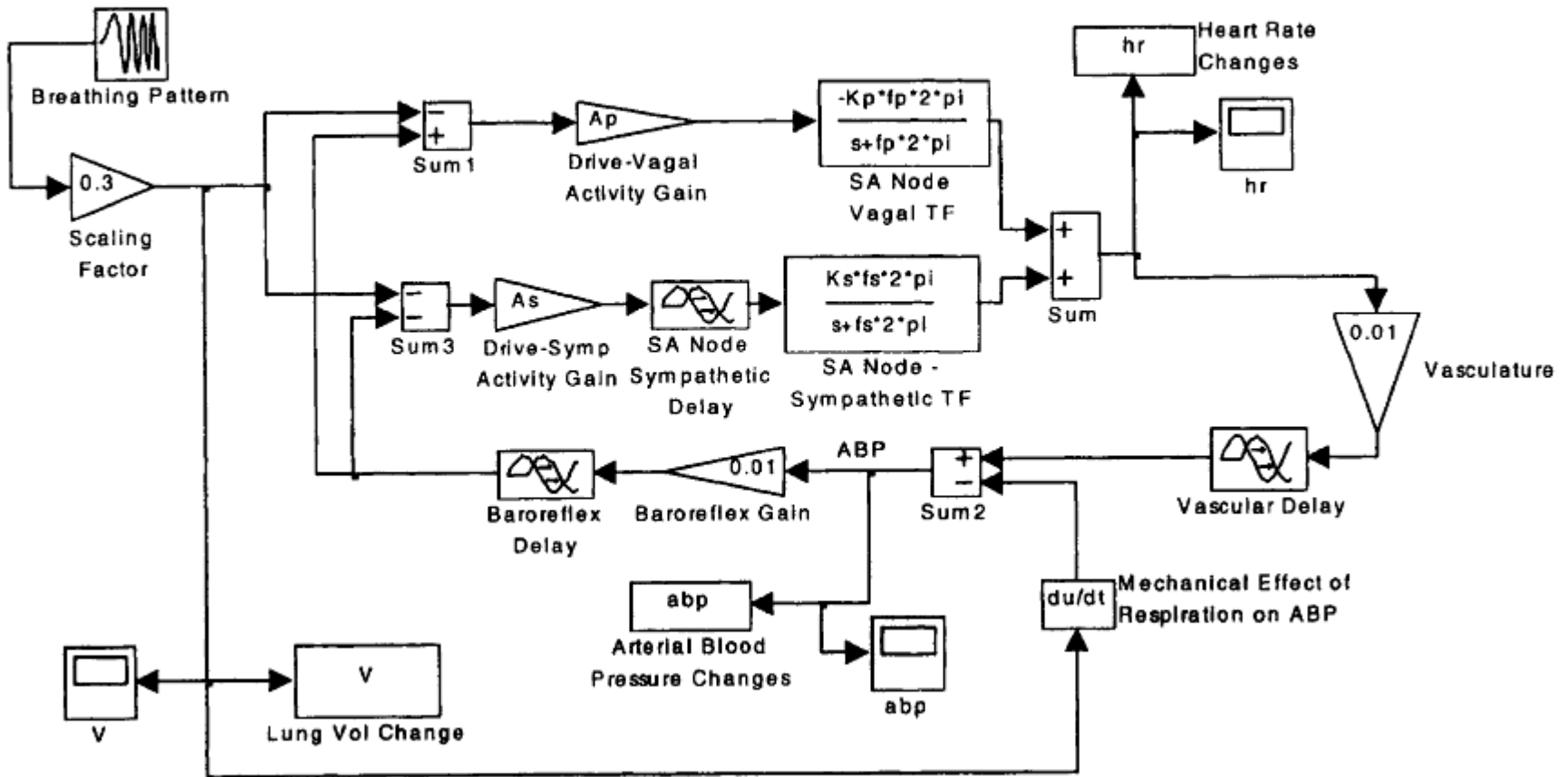
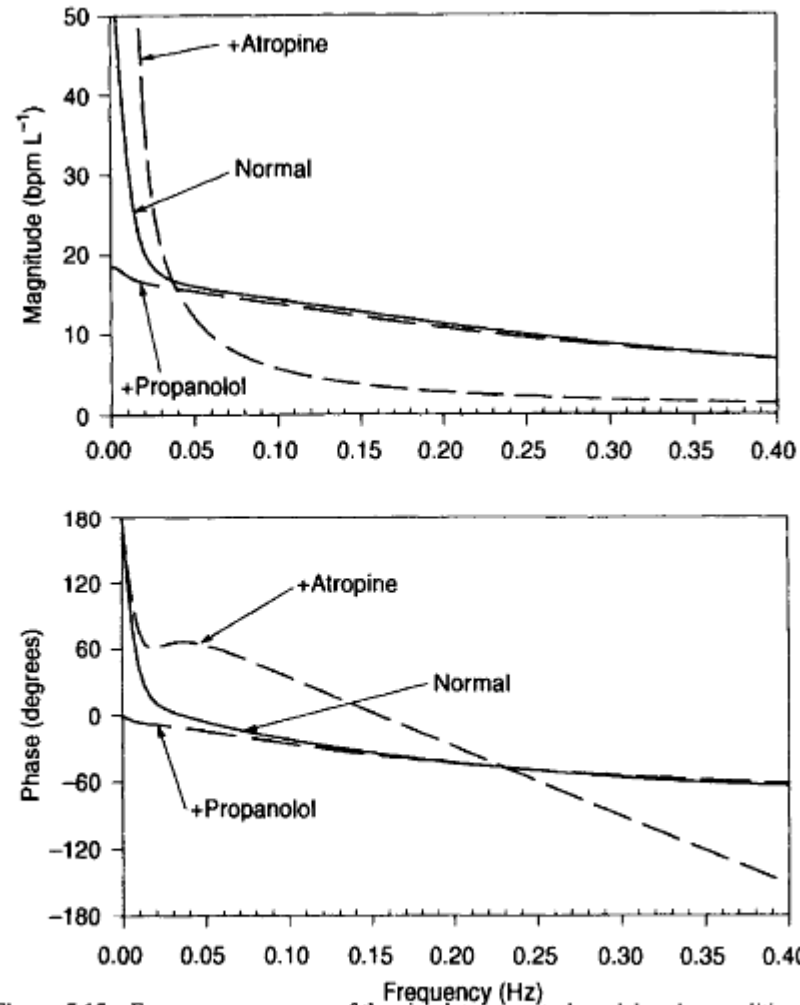


Figure 5.13 SIMULINK model of circulatory control that accounts for the effect of respiration on heart rate and arterial blood pressure.

# Frekvenční analýza modelů fyziologických systémů



**Figure 5.15** Frequency responses of the circulatory control model under conditions that simulate normal heart rate control, complete  $\beta$ -adrenergic blockade (" + Atropine"), and complete parasympathetic blockade (" + Propranolol").