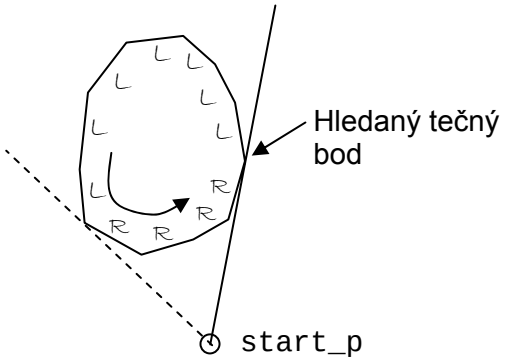
Tipy k úloze číslo 3 – Chanově algoritmu

Měkolik poznámek k vlastnímu binárnímu vyhledávání

Pro každou z malých obálek, které jsme vypočítali Grahamovým algoritmem, potřebujeme najít tečnu z naposledy přidaného bodu do výsledné konvexní obálky. Z těchto tečen k malým obálkám určíme tu, která proti směru hodinových ručiček zatočí nejméně – z ní se stane další bod výsledné konvexní obálky (Viz slajd 29 ve 4. přednášce).

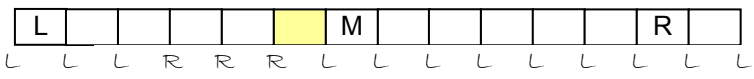
1. Co platí pro tečný bod a proč tento test nestačí pro určení, zda v dalším kroku jít doleva či doprava?

Označíme naposledy přidaný bod jako *start_p*. V našem případě jsou body malé KO uloženy v poli. Při sekvenčním hledání tečného bodu by stačilo najít vrchol, v němž je `start_p` od příchozí úsečky napravo a od odchozí nalevo. Pro všechny úsečky malé KO před tečným bodem je *start_p* napravo, za tečným bodem je nalevo (viz Obrázek 1, kde jsou úsečky malé konvexní obálky označeny psacími písmeny ∟ a ∾). Pokud tedy začneme od nějakého vrcholu a jeho příchozí i odchozí úsečka je označena písmenem ∟ (*start_p* je od ní nalevo) stačí postupovat CW a hledaný tečný bod nemůžeme minout. Obdobně CCW pro segmenty označené ∾.



Obrázek 1 Tečný bod a poloha bodu start nalevo (∟) a napravo (∾) od jednotlivých úseček

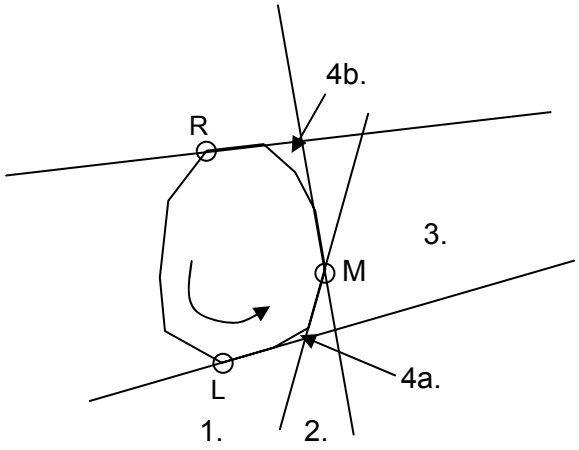
Při půlení se díváme pouze na levý (L), pravý (R) a vypočítaný prostřední bod (M) a snažíme se rozhodnout, zda pokračovat nalevo či napravo od M. Obrázek 2 znázorňuje situaci, kdy je hledaný tečný bod v levém podintervalu, ale pouze podle směrů přicházejících a odcházející úsečky v M bychom „šli doprava“ – po směru hodinových ručiček - CW, tj. přesunuli bychom levý index L do M+1 a úsek ∾ minuli. Proto pouze informace u M nestačí a my musíme brát v úvahu i aktuální polohu bodu L a R, resp. Směry odchozí úsečky v L a příchozí v R – viz dále¨.



Obrázek 2 Situace, kdy ve vypočítaném prostředním bodě (M) navrhne algoritmus pravou polovinu (CW) a přitom by měl jít do levé, neboť v ní je hledaný tečný bod (označen žlutě)

2. Určení, ve kterém ze dvou oblouků pokračovat při půlení oblouku mezi L a R.

Představme si situaci podle obrázku. Je na ní jedna malá konvexní obálka – pro dvojici bodů L a R jsme z předchozího postupu algoritmu určili, že máme hledat napravo – v oblouku LR. Vypočetli jsme bod M v polovině oblouku LR a potřebujeme se rozhodnout, jestli budeme při hledání tečného bodu pokračovat v oblouku LM, nebo MR, tj. v levé či pravé polovině.



Obrázek 3 Oblasti ohraničené směry úseček incidujících s body L, M a R

Odpověď bude záviset na tom, ve které oblasti leží bod *start_p*.

1. Kdyby *start_p* ležel napravo od úsečky nebo na úsečce vycházející z L a zároveň nalevo od úsečky přicházející do bodu M, budeme v hledání tečného bodu pokračovat v intervalu LM, (R = M - 1)
2. Kdyby *start_p* ležel napravo od úsečky nebo na úsečce přicházející do bodu M a zároveň nalevo od úsečky vycházející z bodu M, jsme hotovi, neboť bod M je hledaným tečným bodem
3. Kdyby *start_p* ležel na úsečce vycházející z M nebo napravo od této úsečky a zároveň nalevo od úsečky přicházející do bodu R, budeme v hledání tečného bodu pokračovat v intervalu MR, (L = M + 1)
4. Zbývá rozhodnout situaci, kdyby *start_p* ležel zároveň nalevo od všech čtyř zmiňovaných úseček. Protože nemůže ležet uvnitř malé konvexní obálky (na začátku je extrémním bodem a pak vždy tečným), zbývají malé „trojúhelníkové“ oblasti mezi malou konvexní obálkou a dvojicemi úseček z L a do M (oblast 4a) a z M a do R (oblast 4b). Pro bod *start_p* v oblasti mezi L a M pokračujeme obloukem LM, pro bod *start_p* v oblasti mezi M a R pokračujeme obloukem MR. A jak je od sebe rozlišíme? Stačí zjistit polohu bodu *start_p* např vůči spojnici bodů M a R. Oblast blíže L a M leží od MR nalevo, oblast blíže M a R leží napravo.

Protože pro zjištění směrů z L, do M, z M a do R potřebujeme znát předcházející a následující body, je vhodné se binárním dělením zabývat pouze tehdy, když je bodů mezi L a R včetně alespoň 5. Pokud je bodů méně, splývají se sousedy a trojice bodů z nichž dva jsou totožné jsou vždy kolineární. Vzhledem k dalším singularitám je vhodnější, pokud je bodů alespoň 7.

Pro určení úsečky vycházející z bodu L potřebujeme kromě bodu L ještě bod s indexem L+1, značíme ho L+. Obdobně pro určení příchozí úsečky do bodu M potřebujeme znát body M a jeho předchůdce s indexem M-1 - značíme M-. Viz Obrázek 4.

Obrázek 4 Indexy bodů, které potřebujeme pro rozhodnutí v binárním vyhledávání (zde pro 14 a 7 bodů)

Příklad testu (poloha bodu start_p vůči úsečce M-1,M:

```
if( CGAL::orientation( start_p, *(first+mid-1), *(first+mid)) != CGAL::LEFT_TURN )
```

3. Situace, kdy je zkoumaný bod roven bodu `start_p`

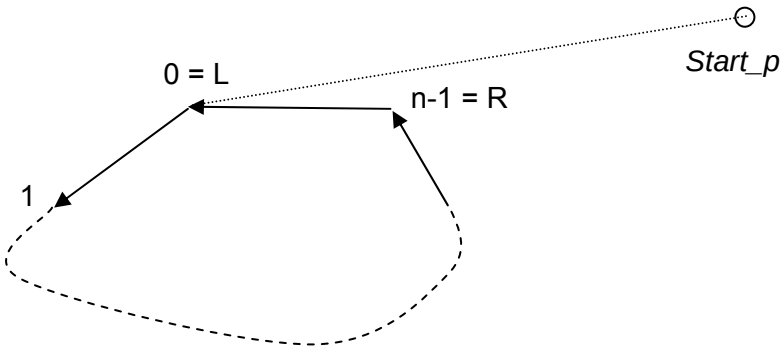
Jde o singularitu – pokud narazíme při prohledávání malé konvexní obálky na bod start_p, znamená to, že je tento bod zrovna součástí zkoumané malé obálky. V takovém případě končíme s vyhledáváním a vracíme následující bod. Např. pro L+1 vracíme L+2 a pro bod R vracíme bod L, neboť jde o cyklickou strukturu.

Příklad testu (bod M je totožný s bodem `start_p`)

```
if( equal_points ( start_p, *(first+mid) ) )
       return *(first+mid+1);
```

4. Stav na začátku algoritmu

Na začátku algoritmu binárního vyhledávání je jako bod L dosazen první bod pole vrcholů a jako pravý bod R poslední bod pole vrcholů malé KO. Jde o to rozhodnout, zda je hledaný tečný bod oblouku RL, který je tvořen jedinou úsečkou, nebo v oblouku LR, tedy ve zbylé male KO. Jde o další singularitu – je třeba spočítat, polohu bodu *start_p* vůči trojici úseček s indexy (n-2,n-1), (n-1, 0) a (0,1).



Obrázek 5 První krok algoritmu - mezi prvním a posledním bodem v poli

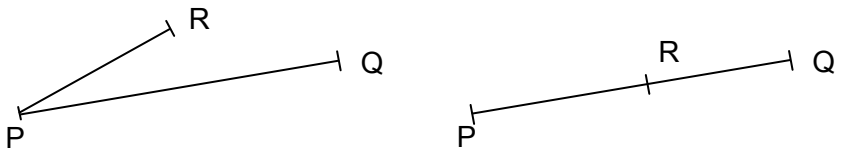
Díky tomu, že vyřešíme konec a začátek pole samostatně, nemusíme již dále uvažovat cykličnost KO a stačí použít klasický algoritmus plení intervalu – nestane se totiž, že bychom museli přejít z konce na začátek pole a naopak.

Co se hodí z knihovny CGAL?

Následující kód ukazuje hledání tečného bodu sekvenčně (viz implementace v knihovně CGAL v souboru ch_jarvis_impl.h) – jako rotation_predicate využíváme ch_traits.less_rotate_ccw_2_object(), protože je true nejen, pokud pro body P,Q,R je bod Q

nalevo od úsečky PR, ale zároveň zahrnuje i případ, kdy jsou tyto tři body kolineární a vrací true, pokud je bod Q dále od P než bod R (viz Obrázek 6).

```
include <boost/bind.hpp>
#include <algorithm>
// find the point with minimal angle in relation to start_p in O(n)
template <class ForwardIterator, class Point, class Traits>
Point linFindMin( ForwardIterator first, ForwardIterator last, const Point& start_p, Traits
ch_traits )
{
	typedef typename Traits::Less_rotate_ccw_2 Less_rotate_ccw;
	Less_rotate_ccw
		rotation_predicate = ch_traits.less_rotate_ccw_2_object();
	ForwardIterator it = std::min_element( first, last, bind( rotation_predicate,
boost::cref(start_p), _1, _2 ));
	return *it;
};
```



Obrázek 6 Situace, kdy predikát less_rotate_ccw_2 vrací true

My ale potřebujeme logaritmickou složitost hledání tečného bodu – proto jsou first a last deklarovány jako RandomAccessIterator a použijeme binární vyhledávání. Kromě less_rotate_ccw_2_object() se hodí i ch_traits.equal_2_object() – využíváme ho na test, jestli už jsme dosáhli bodu start_p, tj. obálka se uzavřela a na test, zda jedním ze zkoumaných bodů není `start_p`. Dále využijeme již známý test na určení polohy bodu vůči úsečce CGAL::orientation…

```
// find the point with minimal angle in relation to start_p in O(loh n)
template <class ForwardIterator, class RandomAccessIterator, class Point, class Traits>
Point logFindMin( ForwardIterator first, RandomAccessIterator last, const Point& start_p,
Traits ch_traits )
{
	typedef typename Traits::Less_rotate_ccw_2 Less_rotate_ccw;
	typedef typename Traits::Point_2                   Point_2;
	typedef typename Traits::Equal_2                   Equal_2;

	Less_rotate_ccw  less_rotate  = ch_traits.less_rotate_ccw_2_object();
	Equal_2          equal_points = ch_traits.equal_2_object();


	if( CGAL::orientation( start_p, *(first+mid_1), *(first+mid)) != CGAL::LEFT_TURN )
	…

	if( !equal_points( min_p, start_p) )  // end condition  - back in the starting point
	{
		*res++ = min_p;
		prev_p = min_p;
	}
	else
		return true; // convex hull closed – we are done
```